Sulla somma dei cubi delle cifre di un multiplo di 3

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio
e-mail: marsan@lime.lic.ti-edu.ch

1. Introduzione

Nel corso di aggiornamento *Quale matematica dopo la scuola dell'obbligo?* (Canobbio, Svizzera, 9-10 marzo 1998) il relatore, professor Mauro Cerasoli (Facoltà di Scienze, Università di L'Aquila) ha citato il seguente curioso risultato pubblicato nel 1961 sulla rivista inglese New Scientist dal matematico israeliano Phil Kohn:

> si prenda un multiplo n di 3 positivo e si formi un nuovo numero m sommando i cubi delle cifre di n; si formi poi un nuovo numero p sommando i cubi delle cifre di m; … Dopo un numero finito di passaggi si otterrà il numero 153, indipendentemente dal multiplo di 3 positivo scelto all'inizio.

Nelle pagine seguenti daremo una dimostrazione elementare di questo risultato, usando in più parti la potenza di calcolo della TI-92 invece di utilizzare tecniche della teoria dei numeri.

2. Esposizione del problema

In questo articolo avremo più volte bisogno delle cifre del numero naturale n. Useremo sempre la notazione seguente:

(1) $$n = \sum_{i=0}^{m} c_i 10^i$$

con $c_m, \ldots, c_1, c_0$ cifre e $c_m \neq 0$.

In tutto l'articolo sarà inoltre sempre sottointeso che k e n sono numeri naturali e che n è positivo.

Definizione 1. Con $S(n)$ indichiamo la somma dei cubi delle cifre di n, ossia:

$$S(n) := \sum_{i=0}^{m} c_i^3 \ .$$

Definiamo ricorsivamente:

$$S_k(n) := \begin{cases} n, & \text{se } k = 0 \\ S(S_{k-1}(n)), & \text{se } k > 0 \end{cases} \ .$$

Il risultato citato nell'introduzione può essere così riformulato:

se n è un multiplo positivo di 3 allora la successione $\left(S_k(n)\right)_k$ avrà il numero 153 come attrattore.

Esempio 1. Sia n = 18. Allora avremo:

$$\begin{aligned} S_0(18) &= 18 \\ S_1(18) &= S(18) = 1^3 + 8^3 = 513 \\ S_2(18) &= S(513) = 5^3 + 1^3 + 3^3 = 153 \\ S_3(18) &= S(153) = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \end{aligned}$$

Per $k \geq 2$ avremo: $S_k(18) = 153$.

Esempio 2. Sia n = 1962. Allora avremo:

$$\begin{aligned} S_0(1962) &= 1962 \\ S_1(1962) &= S(1962) = 1^3 + 9^3 + 6^3 + 2^3 = 954 \\ S_2(1962) &= S(954) = 9^3 + 5^3 + 4^3 = 918 \\ S_3(1962) &= S(918) = 9^3 + 1^3 + 8^3 = 1242 \\ S_4(1962) &= S(1242) = 1^3 + 2^3 + 4^3 + 2^3 = 81 \\ S_5(1962) &= S(81) = 8^3 + 1^3 = 513 \\ S_6(1962) &= S(513) = 5^3 + 1^3 + 3^3 = 153 \\ S_7(1962) &= S(153) = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \end{aligned}$$

Per $k \geq 6$ avremo: $S_k(1962) = 153$.

La funzione `n153(n)`, scritta per la TI-92, permette di fare comodamente degli esperimenti per diversi valori di n.

Esempio 3. La figura 1 mostra l'output di alcuni esempi calcolati con la TI-92.

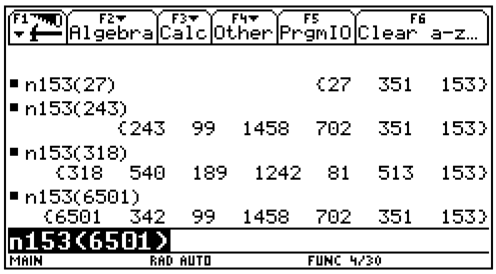

Figura 1.

Esempio 4. Altri esempi calcolati con la TI-92, di cui riportiamo solo la successione dei termini:

- **6**, 216, 225, 141, 66, 432, 99, 1458, 702, 351, **153**
- **123**, 36, 243, 99, 1458, 702, 351, **153**
- **123456**, 441, 129, 738, 882, 1032, 36, 243, 99, 1458, 702, 351, **153**
- **123456789**, 2025, 141, 66, 432, 99, 1458, 702, 351, **153**
- **555555555**, 1125, 135, **153**

- **666666666**, 1944, 858, 1149, 795, 1197, 1074, 408, 576, 684, 792, 1080, 513, **153**
- **999999999**, 6561, 558, 762, 567, 684, 792, 1080, 513, **153**

3. La dimostrazione

Siano a e b dei numeri interi. Con la scrittura

$$a \equiv b \pmod 3$$

o, più semplicemente, $a \equiv b$ (si legge: a e b sono congruenti modulo 3), intendiamo che a e b hanno lo stesso resto quando vengono divisi per 3. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 3 \equiv 6 \equiv \ldots \equiv 3k \\ 1 &\equiv 4 \equiv 7 \equiv \ldots \equiv 3k+1 \\ 2 &\equiv 5 \equiv 8 \equiv \ldots \equiv 3k+2 \end{aligned}$$

Lemma 1. Siano a, b due numeri naturali. Allora:

$$(a+b) \pmod 3 \equiv a \pmod 3 + b \pmod 3$$

e

$$(a \cdot b) \pmod 3 \equiv [a \pmod 3] \cdot [b \pmod 3].$$

<u>Dimostrazione.</u> Siano:

$$a = 3q_1 + r_1,\ b = 3q_2 + r_2,$$

con $r_1 = a \pmod 3$ e $r_2 = b \pmod 3$. Allora:

$$a + b = 3(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) \equiv r_1 + r_2$$

e, analogamente:

$$a \cdot b = 9q_1q_2 + 3(q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2 \equiv r_1r_2.$$

Lemma 2. Se n è divisibile per 3 anche la somma delle cifre di n è divisibile per 3.

<u>Dimostrazione.</u> n sia un multiplo positivo di 3 con la rappresentazione (1). Allora:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv n \pmod 3 \equiv \\ &\equiv \left(\sum_{i=0}^{m} c_i 10^i\right) \pmod 3 \overset{\text{(lemma1)}}{\equiv} \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} \left(c_i 10^i \pmod 3\right) \overset{\text{(lemma1)}}{\equiv} \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} \left[\left(c_i \pmod 3 \cdot \underbrace{\left(10^i \pmod 3\right)}_{\equiv 1, \forall i}\right)\right] \overset{\text{(lemma1)}}{\equiv} \\ &\equiv \left(\sum_{i=0}^{m} c_i\right) \pmod 3 \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Lemma 3. $n^3 \equiv n$ (mod 3).

<u>Dimostrazione</u>. Dividendo un qualsiasi intero n per 3 si possono ottenere unicamente i resti 0, 1, 2. Calcoliamo, modulo 3, i cubi di tali resti:

$$0^3 = 0 \equiv 0\ ,\ \ 1^3 = 1 \equiv 1\ ,\ \ 2^3 = 8 \equiv 2\ .$$

Lemma 4. Se n è un multiplo di 3 positivo allora anche $S_k(n)$ è un multiplo di 3 positivo ($k = 0,1,2,\ldots$).

<u>Dimostrazione</u>. Sia n un multiplo di 3 positivo con la rappresentazione (1). Chiaramente è sufficiente mostrare che $S_1(n) = S(n)$ è un multiplo di 3. Abbiamo:

$$\begin{aligned} S(n) &\equiv \left(\sum_{i=0}^{m} c_i^3\right) \pmod 3 \overset{\text{(lemma 1)}}{\equiv} \sum_{i=0}^{m} \left(c_i^3 \pmod 3\right) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} \left(c_i \pmod 3\right)^3 \overset{\text{(lemma 3)}}{\equiv} \sum_{i=0}^{m} \left(c_i \pmod 3\right) \equiv \\ &\equiv \left(\sum_{i=0}^{m} c_i\right) \pmod 3 \overset{\text{(lemma 2)}}{\equiv} 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

Lemma 5. Gli unici numeri naturali uguali alla somma dei cubi delle loro cifre sono:

0, 1, 153, 370, 371, 407.

<u>Dimostrazione</u>. Sia n>1 con la rappresentazione (1). Dobbiamo trovare tutte le soluzioni dell'equazione

(2) $$S(n) = n.$$

Dapprima abbiamo:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{m} c_i^3 \le \sum_{i=0}^{m} 9^3 = 729(m+1).$$

Dalla tabella 1 si può notare che per numeri n composti da più di 4 cifre il corrispondente valore di $S(n)$ risulta più piccolo di n.

m+1	729(m+1)
1	729
2	1458
3	2187
4	2916
5	3645
6	4374

Tabella 1.

Le eventuali soluzioni della (2) saranno dunque minori di 2916. Siccome

$$2916 = S(9999) \neq 9999$$

possiamo ridurre ancora il limite superiore di ricerca: la maggiore somma dei cubi delle cifre di numeri minori di 2916 la si ottiene con 1999 e vale

$$S(1999) = 2188.$$

Le eventuali soluzioni della (2) sono così minori di 1999. Invece di restringere ancora teoricamente il limite superiore, cerchiamo le soluzioni della (2) mediante la funzione `somcubi(n)`, scritta per la TI-92. Dopo poco più di quattro minuti si ottiene quanto si doveva dimostrare (vedi figura 2).

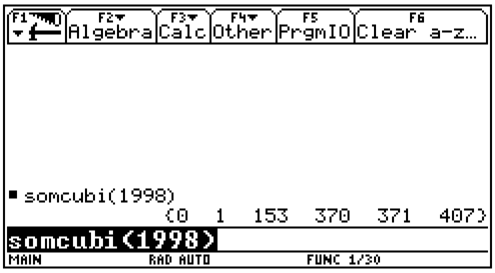

Figura 2.

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato enunciato nell'introduzione.

Teorema 1. Per ogni multiplo n positivo di 3 la successione $(S_k(n))_k$ ha il numero 153 come attrattore.

<u>*Dimostrazione.*</u> Sia n un multiplo di 3. Grazie al lemma 4 possiamo trattare ogni termine di $(S_k(n))_k$ come se si trattasse di un nuovo termine iniziale n.
Ammettiamo che n abbia m+1 cifre. Allora il numero massimo di cifre che può avere $S(n)$ è dato da

$$1+\operatorname{int}(\log(729(m+1))) \,,$$

dove int restituisce la parte intera del suo argomento e log rappresenta il logaritmo decimale. Nella figura 3 sono rappresentate graficamente le funzioni $f(x)=x$ e $g(x)=1+\operatorname{int}(\log(729x))$.

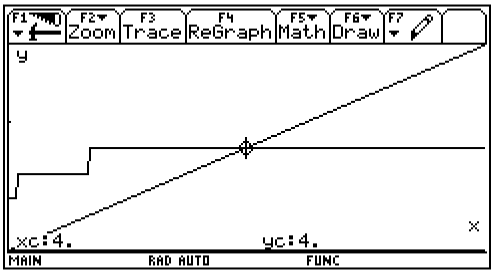

Figura 3.

Come si può vedere esse si intersecano nel punto (4,4). Ciò significa che per numeri con più di 4 cifre vale $S(n)<n$.
Dato n multiplo di 3 e calcolando successivamente i termini $S_2(n), S_3(n),...$ troveremo un indice k per il quale $S_k(n)$ risulterà avere al massimo 4 cifre. Tutti i termini successivi a $S_k(n)$ avranno allora anch'essi al massimo 4 cifre.
Siccome i multipli di 3 composti da al massimo 4 cifre sono in numero finito, può presentarsi una delle due situazioni seguenti:

1. a partire da un certo indice abbiamo che tutti i termini della successione $(S_k(n))_k$ sono uguali: a causa del lemma 5 questo può capitare solo se la successione converge verso 153 (153 è l'unico multiplo di 3 che può essere espresso come somma dei cubi delle proprie cifre).
2. a partire da un certo indice la successione si ripete ciclicamente.

Mostriamo ora che 2. non può verificarsi. Per delle considerazioni fatte in precedenza possiamo limitarci allo studio di $S_k(n)$ per n < 10000 e n multiplo di 3. In tal caso il valore massimo di $S(n)$ lo si ottiene in corrispondenza di n = 9999: S(9999) = 2916. Con la TI-92 e la funzione `n153(n)` possiamo verificare facilmente che S_k(9999) converge verso 153.
Siccome per n<9999 vale $S(n)$<2916 possiamo limitarci a considerare n<2916 e multiplo di 3.
Sia dunque n<2916 e multiplo di 3. Il valore massimo di $S(n)$ lo si ottiene in corrispondenza di n = 1998: S(1998) = 1971. Con la TI-92 e la funzione `n153(n)` possiamo verificare facilmente che S_k(1998) converge verso 153. Per n<2916 vale dunque $S_k(n)$<1971 e possiamo quindi limitarci a considerare n<1971.
Purtroppo un ragionamento analogo non è più ripetibile poiché per n<1971 e multiplo di 3 il valore massimo di $S(n)$ è dato da S(999)=2187 e 2187>999.
Possiamo però usare la TI-92 per controllare tutti i multipli di 3 minori di 1971 della forma

$$c_3c_2c_1c_0\,, \text{ con } c_3 \le c_2 \le c_1 \le c_0 \text{ e } c_3 \in \{0,1\}$$

dove $c_3c_2c_1c_0$ è la rappresentazione decimale di n (evidentemente permutando le cifre di un numero n la somma dei cubi delle cifre non cambia). Questo controllo viene eseguito dal programma `prova()` per la TI-92 (nella figura 4 è mostrata la schermata finale dell'output).

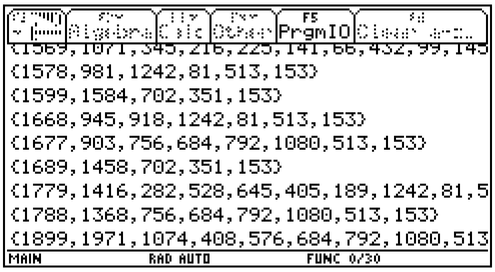

Figura 4.

La correttezza del programma `prova()` è garantita dal fatto che esso richiama al suo interno la funzione `n153(n)` che, a sua volta, ha come unico criterio di arresto il raggiungimento della convergenza a 153. Il programma `prova()` termina il suo lavoro in poco meno di tre minuti, concludendo così la dimostrazione del teorema.

3. Listato dei programmi

Il listato 1 è relativo alla funzione `n153(n)` che calcola $(S_k(n))_k$ se n è un multiplo di 3 oppure restituisce n in caso contrario. Nella `n153(n)` si fa uso di funzioni predefinite della TI-92 per la manipolazione delle stringhe di caratteri.

(n)

```
Func
Local s,k,i,w,r
{n}»r
If mod(n,3)□0 or 0□n Then
Goto fine
EndIf
n»w
Lbl ciclo
string(w)»s
dim(s)»k
sum(seq((expr(mid(s,i,1)))^3,i,1,k))»w
augment(r,{w})»r
If w=153 Then
Goto fine
Else
Goto ciclo
EndIf
Lbl fine
r
EndFunc
```

Listato 1.

Il listato seguente è relativo alla funzione **`m153(n)`** che calcola sempre la successione $\left(S_k(n)\right)_k$. La differenza rispetto alla funzione precedente sta nel fatto che l'implementazione della **`m153(n)`** è classica, nel senso che si ricercano le cifre del numero *n* mediante le comuni operazioni di aritmetica modulare. Da notare che questa implementazione è sensibilmente più lenta della precedente!

```
(n)
Func
local s,r,i,k,w
{n}»r
if mod(n,3)□0 or 0□n
goto fine
n»w
while w□153
int(log(w))+1»k
0»s
for i,1,k,1
s+mod(w,10)^3»s
intdiv(w,10)»w
endfor
augment(r,{s})»r
s»w
endwhile
lbl fine
r
EndFunc
```

Listato 2.

Il listato 3 contiene la funzione **`somcubi(n)`** che serve per dimostrare il lemma 5. Essa è una semplice variazione della funzione **`n153(n)`**. Il parametro *n* è il limite di arresto della ricerca.

```
(n)
Func
Local s,i,j,k,w,r
{}»r
For j,0,n,1
string(j)»s
dim(s)»k
sum(seq((expr(mid(s,i,1)))^3,i,1,k))»w
If w=j Then
augment(r,{w})»r
EndIf
EndFor
r
EndFunc
```

Listato 3.

Il listato 4 contiene il codice del programma **`prova()`** che serve per terminare la dimostrazione del teorema 1. Esso fa uso della capacità della TI-92 di trattare le stringhe di caratteri e richiama la funzione **`n153(n)`** (vedi listato 1.).

```
()
Prgm
Local a,b,c,d
clro
For a,0,1,1
For b,a,9,1
For c,b,9,1
For d,c,9,1
expr(string(a)&string(b)&string(c)&string(d))»nn
If mod(nn,3)=0 Then
Disp n153(nn)
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
EndFor
EndPrgm
```

Listato 4.