

# Alcuni esempi dell' algoritmo di Gauss-Jordan per la riduzione per righe di una matrice

(\* Claudio Marsan, Liceo cantonale di Mendrisio, 01.12.2005 \*)

- `reset()`:
- `read("f:\\MuPAD\\MyLib\\Gauss_Jordan.mu")`: // sostituire con il percorso corretto

## Esempio 1

- `A := matrix([[0,0,4,0], [2,2,-2,5], [5,5,-1,5]])`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{cccc|c} +- & & & & -+ \\ | & 0 & 0 & 4 & 0 & | \\ | & 2 & 2 & -2 & 5 & | \\ | & 5 & 5 & -1 & 5 & | \\ +- & & & & -+ \end{array}$$

=====

Scambio la riga 1 con la riga 2

$$\begin{array}{cccc|c} +- & & & & -+ \\ | & 2 & 2 & -2 & 5 & | \\ | & 0 & 0 & 4 & 0 & | \\ | & 5 & 5 & -1 & 5 & | \\ +- & & & & -+ \end{array}$$

=====

Divido la riga 1 per 2

$$\begin{array}{cccc|c} +- & & & & -+ \\ | & 1 & 1 & -1 & 5/2 & | \\ | & 0 & 0 & 4 & 0 & | \\ | & 5 & 5 & -1 & 5 & | \\ +- & & & & -+ \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 1 moltiplicata per -5

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -15/2 \end{array} \right| \\ - + \end{array}$$

=====

Divido la riga 2 per 4

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -15/2 \end{array} \right| \\ - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per -4

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15/2 \end{array} \right| \\ - + \end{array}$$

=====

Divido la riga 3 per -15/2

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ - + \end{array}$$

=====

La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 3 moltiplicata per -5/2

$$\begin{array}{c} + - \\ | \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \\ + - \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per 1

$$\begin{array}{c} + - \\ | \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \\ + - \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

- gaussJordan(A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 2**

- A := matrix([[1,1,0], [1,-1,1], [4,2,1]])

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- RMR(A)

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ | \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad | \\ | \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ + - \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right]$$

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 1 moltiplicata per -1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & \\ 4 & 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right]$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 1 moltiplicata per -4

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right]$$

=====

Divido la riga 2 per -2

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1/2 & \\ 0 & -2 & 1 & \\ \hline \end{array} \right]$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per 2

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1/2 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \right]$$

=====

La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====  
Aggiungo alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per -1

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| - + \\ + - \end{array}$$

=====  
La matrice e' ridotta per righe.

- `gaussJordan(A)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Esempio 3

- `A := matrix([[2,2,-2,5], [7,7,1,10], [5,5,-1,5]])`

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{array} \right| - + \\ + - \end{array}$$

=====  
Divido la riga 1 per 2

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ & & & \end{array} \right| - + \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 1 moltiplicata per -7

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & -15/2 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 1 moltiplicata per -5

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & -15/2 \\ 0 & 0 & 4 & -15/2 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Divido la riga 2 per 8

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -15/16 \\ 0 & 0 & 4 & -15/2 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per -4

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -15/16 \\ 0 & 0 & 0 & -15/4 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Divido la riga 3 per  $-15/4$

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -15/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ - + \end{array}$$

=====

La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 3 moltiplicata per  $15/16$

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 3 moltiplicata per  $-5/2$

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per 1

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ - + \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

- `gaussJordan(A)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Esempio 4

- `A := matrix([[1,-1,1,1], [1,1,-1,2]])`

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \\ + - \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 1 moltiplicata per -1

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ + - \end{array}$$

=====

Divido la riga 2 per 2

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array} \right] \\ + - \end{array}$$

=====

La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per 1

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 & \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & \end{array} \right. \\ + - \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

- `gaussJordan(A)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

### Esempio 5

- `A := matrix([[0,0,6,2,-4,-8,8], [0,0,3,1,-2,-4,4], [2,-3,1,4,-7,1,2], [6,-9,0,11,-19,3,1]])`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 1 \end{array} \right. \\ + - \end{array}$$

=====

Scambio la riga 1 con la riga 3

$$\begin{array}{c} + - \\ \left| \begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \end{array} \right. \\ + - \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 1 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Divido la riga 1 per 2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 1 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 4 la riga 1 moltiplicata per -6

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Divido la riga 2 per 3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per -6

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right| \\ \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5 & \\ \hline \end{array}$$

=====  
 Aggiungo alla riga 4 la riga 2 moltiplicata per 3

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

=====  
 Scambio la riga 3 con la riga 4

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

=====  
 Divido la riga 3 per -4

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -4/3 & 4/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

=====  
 La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 3 moltiplicata per 4/3

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 3 moltiplicata per -1/2

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 1/2 & 2 & -7/2 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ + - \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 1 la riga 2 moltiplicata per -1/2

$$\begin{array}{c} + - \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -3/2 & 0 & 11/6 & -19/6 & 0 & 1/24 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ + - \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

- `gaussJordan(A)`

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{11}{6} & -\frac{19}{6} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Esempio 6

- `A := matrix([[0,0,0,0], [0,0,0,0]])`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + - & & & - + \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ + - & & & - + \end{array} \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

### Esempio 7

- `A := matrix([[3], [5], [0], [1]])`

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- `RMR(A)`

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} + - & - + \\ | & 3 & | \\ | & 5 & | \\ | & 0 & | \\ | & 1 & | \\ + - & - + \end{array} \end{array}$$

=====

Divido la riga 1 per 3

$$\begin{array}{c} + - \quad - + \\ | \quad 1 \quad | \\ | \quad 5 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ | \quad 1 \quad | \\ + - \quad - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 2 la riga 1 moltiplicata per -5

$$\begin{array}{c} + - \quad - + \\ | \quad 1 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ | \quad 1 \quad | \\ + - \quad - + \end{array}$$

=====

Aggiungo alla riga 4 la riga 1 moltiplicata per -1

$$\begin{array}{c} + - \quad - + \\ | \quad 1 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad | \\ + - \quad - + \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

### Esempio 8

- `A := matrix([[6,7,8,9]])`

( 6 7 8 9 )

- RMR(A)

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ | 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 | \\ + - \end{array}$$

=====

Divido la riga 1 per 6

$$\begin{array}{c} + - \\ | 1 \quad 7/6 \quad 4/3 \quad 3/2 | \\ + - \end{array}$$

=====

La matrice e' ridotta per righe.

### Esempio 9

- `A := matrix([[0,0,0,1], [0,0,1,0], [0,0,0,1]])`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- RMR(A)

La matrice da ridurre per righe

$$\begin{array}{c} + - \\ | 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 | \\ | 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 | \\ | 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 | \\ + - \end{array}$$

=====

Scambio la riga 1 con la riga 2

$$\begin{array}{c} + - \\ | 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 | \\ | 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 | \\ | 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 | \\ + - \end{array}$$

=====  
Aggiungo alla riga 3 la riga 2 moltiplicata per -1

$$\begin{array}{c} + - \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \\ | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \\ + - \end{array} \quad \begin{array}{c} - + \\ | \\ | \\ | \\ - + \end{array}$$

=====  
La matrice e' a gradini e tutti i pivot valgono 1.

Ora la riduco per righe.

=====  
La matrice e' ridotta per righe.