Mauro Arrigoni, Claudio Marsan

Introduzione ai modelli matematici

Liceo Cantonale Mendrisio, 1998

Dispense per il seminario interdisciplinare di matematica e informatica, Liceo Cantonale di Mendrisio, anno scolastico 1998–1999.

22 novembre 1998

Questo testo è stato scritto dagli autori con LaTeX2ε.

Mauro Arrigoni
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH–6850 Mendrisio

e-mail: `arrigoni@lime.lic.ti-edu.ch`

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH–6850 Mendrisio

e-mail: `Claudio.Marsan@lime.lic.ti-edu.ch`

INDICE

CAPITOLO 1

Equazioni alle differenze

1.1 Equazioni alle differenze lineari del primo ordine

Definizione 1.1.1. Un'*equazione alle differenze del primo ordine* è un'equazione del tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

Si dice che la (1.1) è *lineare* se f è una funzione lineare di y_n, altrimenti è detta *non lineare*. Una *soluzione* della (1.1) è una successione

$$n \mapsto y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

che soddisfa l'equazione per ogni valore di n.
Oltre all'equazione si può dare anche una *condizione iniziale* (o *valore iniziale*)

$$y_0 = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Esempio 1.1.1. L'equazione

$$y_{n+1} = 3y_n - 5, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

è un'equazione alle differenze lineare del primo ordine. Assegnando la condizione iniziale $y_0 = 1$ si ottiene la successione

$$y_0 = 1, y_1 = -2, y_2 = -11, y_3 = -38, y_4 = -119, y_5 = -362, \dots$$

Esempio 1.1.2. L'equazione

$$y_{n+1} = 3{y_n}^2 - 5, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

è un'equazione alle differenze non lineare del primo ordine.

Nel seguito di questo paragrafo tratteremo *equazioni alle differenze lineari del primo ordine a coefficienti costanti*, ossia indipendenti dal valore dell'indice n e quindi del tipo

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

che possono essere scritte più semplicemente come

$$y_{n+1} = q \cdot y_n + d, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad q, d \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Definizione 1.1.2. L'equazione (1.3) è detta *omogenea* se $d = 0$, *inomogenea* se $d \neq 0$.

Le equazioni alle differenze del primo ordine sono *equazioni ricorsive*: per conoscere y_{n+1} bisogna conoscere y_n, per conoscere y_n bisogna conoscere y_{n-1}, per conoscere y_{n-1} bisogna conoscere y_{n-2}, eccetera. Si vorrebbe avere un metodo per calcolare y_{n+1} direttamente.

Teorema 1.1.1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze lineare omogenea di primo ordine*

$$y_{n+1} = q \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad q \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

è l'insieme delle successioni geometriche

$$y_n = q^n \cdot y_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (1.4) segue:

$$\begin{aligned} y_1 &= q \cdot y_0 \\ y_2 &= q \cdot y_1 = q^2 \cdot y_0 \\ &\ldots \\ y_n &= q^n \cdot y_0. \end{aligned}$$

Si dimostra facilmente (per induzione completa) che dunque ogni soluzione della (1.4) è una successione geometrica. □

Esempio 1.1.3. Sia data l'equazione alle differenze lineare omogenea di primo ordine

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Allora le sue soluzioni sono le successioni geometriche di termine generale

$$y_n = 2^n y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Passiamo ora allo studio delle equazioni alle differenze lineari inomogenee di primo ordine

$$y_{n+1} = q \cdot y_n + d, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad q \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}^*. \tag{1.5}$$

Vorremmo poter trovare le soluzioni di tali equazioni per poter rispondere agevolmente a quesiti come quelli posti nel prossimo esempio.

Esempio 1.1.4. Una popolazione di api perde, durante i mesi estivi, settimanalmente il 20% delle operaie presenti all'inizio della settimana. Ogni settimana però si aggiungono alla popolazione 7'000 giovani operaie. Si ha dunque l'equazione alle differenze

$$y_{n+1} = y_n \cdot 0.8 + 7'000, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

dove y_0 è il numero delle api operaie al momento iniziale dell'osservazione, mentre y_n è il loro numero dopo n settimane. Sia $y_0 = 20'000$.

1. Quale sarà il numero delle api dopo 12 settimane?

2. Quante nuove api si dovrebbero aggiungere ogni settimana, se dopo 12 settimane si vuole ottenere una popolazione doppia?

Risolviamo ora la (1.5). Sia $q \neq 1$ (altrimenti si ottiene una successione aritmetica e quindi $y_n = y_0 + n \cdot d$). Cerchiamo dapprima una *soluzione particolare* semplice e cioé la soluzione costante

$$y_n = \alpha, \quad n = 0, 1, 2 \dots, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nella (1.5) otteniamo

$$\alpha = q \cdot \alpha + d,$$

da cui

$$\alpha = \frac{d}{1-q}.$$

Sia ora $y_0, y_1, y_2, \dots$ una qualsiasi altra soluzione della (1.5). Sottraendo membro a membro le due soluzioni si ottiene

$$y_{n+1} - \alpha = q \cdot (y_n - \alpha), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

e, ponendo

$$z_n := y_n - \alpha, \quad n = 0, 1, 2 \dots,$$

si ottiene la seguente equazione alle differenze lineare omogenea di primo ordine

$$z_{n+1} = q \cdot z_n, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

le cui soluzioni sono del tipo

$$z_n = q^n \cdot A, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

dove A è una costante che dovrà essere scelta opportunamente (condizione iniziale). Segue quindi

$$y_n = \alpha + q^n \cdot A, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

ed infine la soluzione generale sarà data da

$$y_n = \frac{d}{1-q} + q^n \cdot A, \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{1.6}$$

Effettivamente per $n = 0, 1, 2 \ldots$ si ha:

$$y_{n+1} = \alpha + q^{n+1} \cdot A = q \cdot \alpha + d + q^{n+1} \cdot A = q \cdot (\alpha + q^n \cdot A) + d = q \cdot y_n + d.$$

Fissata la condizione iniziale y_0 si avrà una soluzione univoca:

$$y_0 = \frac{d}{1-q} + A,$$

da cui

$$A = y_0 - \frac{d}{1-q}\ .$$

Sostituendo il valore trovato di A nella (1.6) si ottiene infine:

$$y_n = \frac{d}{1-q} + q^n \cdot \left(y_0 - \frac{d}{1-q} \right). \tag{1.7}$$

Abbiamo così dimostrato:

Teorema 1.1.2. *La soluzione esplicita dell'equazione alle differenze lineare inomogenea di primo ordine*

$$y_{n+1} = q \cdot y_n + d, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad q \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}^*$$

è data da:

$$\begin{cases} y_n = \dfrac{d}{1-q} + q^n \cdot \left(y_0 - \dfrac{d}{1-q} \right), \ \textit{se} \ \ q \neq 1 \\ y_n = y_0 + n \cdot d, \ \textit{se} \ \ q = 1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Osservazione 1.1.1. La dimostrazione data per il teorema 1.1.2 non è forse la più semplice ma rispecchia un modo di procedere che incontreremo anche nella risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali. Un'altra dimostrazione del teorema 1.1.2, sempre nel caso $q \neq 1$, si basa sul metodo di induzione e sulla formula della somma dei primi n termini di una successione geometrica:

$$\begin{aligned} & y_1 = q \cdot y_0 + d \\ & y_2 = q \cdot y_1 + d = q \cdot (q \cdot y_0 + d) + d = q^2 \cdot y_0 + d \cdot (1 + q) \\ & y_3 = q \cdot y_2 + d = q^3 \cdot y_0 + d \cdot (1 + q + q^2) \\ & \quad \ldots \\ & y_n = q^n \cdot y_0 + d \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = q^n \cdot y_0 + d \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}\ . \end{aligned}$$

Si verifica poi facilmente che

$$y_n = q^n \cdot y_0 + d \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{1.8}$$

è equivalente alla (1.7).

Esempio 1.1.5. (continuazione dell'esempio 1.1.4) Grazie al teorema 1.1.2 possiamo ora rispondere alle domande poste nell'esempio 1.1.4.

1. La soluzione generale dell'equazione alle differenze posta è data da:
$$y_n = \frac{7'000}{1-0.8} + (0.8)^n \cdot \left(20'000 - \frac{7'000}{1-0.8}\right) = 35'000 - 15'000 \cdot (0.8)^n$$
e, ponendo $n = 12$ otteniamo:
$$y_{12} = 35'000 - 15'000 \cdot (0.8)^{12} = 33'969.$$

2. Con 7'000 nuove api per settimana non si raggiungerà mai un numero doppio, ma la popolazione si avvicinerà sempre più, con il crescere di n, al valore 35'000.

   Per avere $y_{12} = 40'000$ deve valere:
$$40'000 = \frac{d}{0.2} + (0.8)^{12} \cdot (20'000 - \frac{d}{0.2}),$$
da cui $d = 8'295$.

Esempio 1.1.6. In occasione del ritrovo annuale dei premi Nobel sull'isola di Mainau, Werner Heisenberg (Premio Nobel per la fisica nel 1932) siedeva accanto a Manfred Eigen (Premio Nobel per la chimica nel 1967), durante il banchetto ufficiale.
Heisenberg aveva davanti a sé un bicchiere di vino rosso *Petrus*, Eigen un bicchiere di vino bianco *Montrachet*; entrambi i bicchieri contenevano 1 dl di vino. Ad un certo momento Heisenberg prende un cucchiaio del suo *Petrus* (1 cl) e lo versa nel bicchiere di Eigen, mescolando poi per bene; Eigen ripete l'identica operazione dal suo bicchiere. L'intero processo si ripete un numero indefinito di volte.
Verso quale valore limite tenderà la quantità di vino *Petrus* nel bicchiere di Heisenberg?
Siano:

- p_n i dl di vino *Petrus* nel bicchiere di Heisenberg dopo n operazioni;
- m_n i dl di vino *Montrachet* nel bicchiere di Eigen dopo n operazioni.

Allora
$$p_{n+1} = \frac{9}{10} \cdot p_n + \frac{1}{11} \cdot (m_n + 0.1 \cdot p_n)$$
e, poiché $p_n + m_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$p_{n+1} = \frac{9}{10} \cdot p_n + \frac{1}{11} \cdot (1 - p_n + 0.1 \cdot p_n) = \frac{9}{11} p_n + \frac{1}{11} \ ,$$
da cui
$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{11}\right)^n \ .$$

Siccome $\left(\frac{9}{11}\right)^n \to 0$ per $n \to +\infty$ la quantità di *Petrus* contenuta nel bicchiere di Heisenberg tenderà verso $\frac{1}{2}$ al crescere di n.
In entrambi i bicchieri, dopo infinite operazioni, metà del vino sarà dunque *Petrus* e metà *Montrachet* (facendo sicuramente inorridire Sommeliers, Gran Coppieri e tutti i degustatori del buon vino ...).

Esercizio 1.1.1. Si consideri l'equazione (1.7) oppure la (1.8). Qual è il comportamento di y_n per $n \to \infty$? Trattare separatamente i casi seguenti:

1. $q > 1$;
2. $0 < q < 1$;
3. $-1 < q < 0$.

1.2 Equazioni alle differenze lineari di secondo ordine

Definizione 1.2.1. Un'*equazione alle differenze del secondo ordine* è un'equazione del tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.9}$$

Si dice che la (1.9) è *lineare* se f è una funzione lineare di y_n e di y_{n-1}, altrimenti è detta *non lineare*. Una *soluzione* della (1.9) è una successione

$$n \mapsto y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

che soddisfa l'equazione per ogni valore di n.
Oltre all'equazione si possono dare anche le *condizioni iniziali*

$$y_0 = a_0,\ y_1 = a_1, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Esempio 1.2.1. L'equazione

$$y_{n+1} = 3y_n + 2y_{n-1} - 5, \quad n = 1, 2, \dots$$

è un'equazione alle differenze lineare del secondo ordine. Assegnando le condizioni iniziali $y_0 = 1$ e $y_1 = -1$ si ottiene la successione

$$y_0 = 1, y_1 = -1, y_2 = -6, y_3 = -25, y_4 = -92, y_5 = -331, \dots$$

Esempio 1.2.2. L'equazione

$$y_{n+1} = 3y_n^2 + \frac{1}{2y_{n-1}} - 5, \quad n = 1, 2, \dots$$

è un'equazione alle differenze non lineare del secondo ordine.

Nel seguito tratteremo equazioni alle differenze lineari del secondo ordine indipendenti dal valore dell'indice n, ossia equazioni del tipo

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad n = 1, 2 \ldots$$

che possono essere scritte più semplicemente come

$$y_{n+1} = b \cdot y_n + c \cdot y_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad b, d \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^*. \tag{1.11}$$

Definizione 1.2.2. L'equazione (1.11) è detta *omogenea* se $d = 0$, *inomogenea* se $d \neq 0$.

Le equazioni alle differenze del secondo ordine sono equazioni ricorsive più complicate di quelle del primo ordine poiché per conoscere y_{n+1} bisogna conoscere y_n e y_{n-1}, per conoscere y_n bisogna conoscere y_{n-1} e y_{n-2}, per conoscere y_{n-1} bisogna conoscere y_{n-2} e y_{n-3}, eccetera. Si vorrebbe avere un metodo per calcolare y_{n+1} direttamente.

Esempio 1.2.3. Leonardo Pisano, detto Fibonacci, propose attorno al XII secolo ai suoi studenti il seguente problema:

> Un certo tipo di coniglio diventa adulto (sessualmente, cioé in grado di riprodursi) all'età di un mese. Da una coppia divenuta adulta, dopo un mese, nascerà un'altra coppia che a sua volta dopo un mese diverrà adulta e così via di mese in mese. Al momento $n = 0$ arriva una coppia di conigli in una regione fino a quel momento disabitata da altri conigli; al momento $n = 1$ (dopo un mese) ci saranno due coppie (la vecchia e quella appena nata). Come si evolverà la popolazione F_n delle coppie di conigli, premesso che nessuno muoia?

n	coppie di conigli	F_n
0	C_1	1
1	$C_1 \rightsquigarrow c_2$	2
2	$C_1 \rightsquigarrow c_3$, C_2	3
3	$C_1 \rightsquigarrow c_4$, $C_2 \rightsquigarrow c_5$, C_3	5
4	$C_1 \rightsquigarrow c_6$, $C_2 \rightsquigarrow c_7$, $C_3 \rightsquigarrow c_8$, C_4, C_5	8

Nella tabella precedente le coppie di conigli indicate con la lettera maiuscola sono da ritenere adulte, quelle con la lettera minuscola no. Con il simbolo $C_i \rightsquigarrow c_j$ nella k–esima riga della tabella intendiamo: la coppia C_i ha generato la coppia c_j al tempo k. La tabella ci fa supporre che l'evoluzione della popolazione dei nostri conigli può essere descritta dalla successione ricorsiva

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.12}$$

Poiché nessuna coppia di conigli muore, le F_n coppie presenti al momento n, sono presenti anche al momento $n + 1$; inoltre le coppie che al momento n sono diventate adulte si sono riprodotte: queste sono le coppie F_{n-1} che vivevano già al momento $n-1$. Con l'aiuto dell'equazione ricorsiva si possono calcolare:

$$\begin{aligned}
F_5 &= 8+5 = 13\\
F_6 &= 13+8 = 21\\
F_7 &= 21+13 = 34\\
&\dots
\end{aligned}$$

Questa successione di numeri, conosciuta come la *successione di Fibonacci*, si incontra considerando altre realtà della natura, come ad esempio nella disposizione delle foglie lungo i rami di molte piante oppure nel numero di petali di alcuni fiori (per esempio per le margherite: 34, 55 e 89 petali).
Vogliamo risolvere ora l'equazione (1.12) che è un'equazione alle differenze lineare omogenea di secondo ordine.
Ammettiamo che

$$F_n = q^n \cdot F_0, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad F_0 \in \mathbb{R}^*,$$

sia una soluzione. Allora:

$$q^{n+1} \cdot F_0 = q^n \cdot F_0 + q^{n-1} \cdot F_0,$$

ossia

$$q^{n-1} \cdot (q^2 - q - 1) = 0.$$

L'equazione $q^2 - q - 1$, detta *equazione caratteristica*, possiede le soluzioni

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Sostituendo nell'equazione (1.12) si può verificare che con i valori di q la soluzione generale assume la forma

$$F_n = q_1^n \cdot A + q_2^n \cdot B, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Siccome $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$ possiamo determinare i valori per le costanti A e B:

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot A + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot B \end{cases}$$

da cui segue:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \cdot \sqrt{5}.$$

La soluzione dell'equazione alle differenze (1.12), che equivale alla formula esplicita della successione di Fibonacci, è dunque:

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \sqrt{5}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10} \cdot \sqrt{5}\right) \tag{1.13}$$

Calcoliamo per esempio a_{32}:

$$\begin{aligned} F_{32} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{32} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\sqrt{5}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{32} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\cdot\sqrt{5}\right) \\ &\cong (1.6180339)^{32} \cdot 1.1708 - (-0.61803)^{32} \cdot (-0.17082) \cong 5'702'875. \end{aligned}$$

Il valor esatto, calcolato con la formula ricorsiva, è $F_{32} = 5'702'887$: l'errore è dovuto all'approssimazione per i valori q_1 e q_2.

Osservazione 1.2.1. Spesso si costruisce la successione di Fibonacci partendo dai termini iniziali $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$:

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad \ldots$$

Adottando la definizione seguente

$$\begin{cases} F_0 := 0 \\ F_1 := 1 \\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

si può dimostrare che l'n–esimo numero di Fibonacci F_n si può ottenere dalla formula seguente, nota come *formula di Binet*:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ovviamente la formula di Binet, fatti gli opportuni aggiustamenti degli indici, è equivalente alla (1.13).

Osservazione 1.2.2. Esistono molte formule e relazioni suggestive che riguardano la successione di Fibonacci. Riportiamo solo la seguente che si dimostra facilmente per induzione (esercizio!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

con $F_0 := 0$ e $F_1 := 1$.

Esercizio 1.2.1. Calcolare il rapporto $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ per $n \to \infty$.

Esempio 1.2.4. (Modello preda–predatore)
In un certo habitat una specie, considerata *preda*, si riprodurrebbe con un tasso di valore 4 in assenza di un'altra specie, considerata *predatrice*.
Siano:

- a_k il numero di prede della generazione k;
- b_k il numero di predatori della generazione k.

Vale il modello:

$$\begin{cases} a_{k+1} = 4a_k - 200b_{k+1}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_{k+1} = 0.01a_{k-1} + b_k, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

che ammette che ogni predatore mangia 200 prede e che ad ogni 100 prede corrisponde un aumento di un'unità della specie predatrice, la quale però diventa attiva (in grado cioé di riprodursi) solo dopo due generazioni.
Scriviamo dapprima l'equazione per la preda nella forma

$$a_k = 4a_{k-1} - 200b_k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

e la sottraiamo dall'equazione originale, ottenendo:

$$a_{k+1} - a_k = 4(a_k - a_{k-1}) - 200(b_{k+1} - b_k), \qquad k = 1, 2, \dots \tag{1.14}$$

Dall'equazione per il predatore si ricava

$$b_{k+1} - b_k = 0.01a_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

che, sostituita nella (1.14), fornisce

$$a_{k+1} = 5a_k - 6a_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

ossia un'equazione alle differenze del secondo ordine lineare omogenea, la cui equazione caratteristica è

$$q^2 - 5q + 6 = 0,$$

con le soluzioni

$$q_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad q_2 = 2 \ .$$

La soluzione generale sarà dunque

$$a_k = A \cdot 3^k + B \cdot 2^k, \qquad A, B \in \mathbb{R}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Fissando le condizioni iniziali $a_0 = 1'000$ e $a_1 = 2'000$ possiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1'000 = A + B \\ 2'000 = 3A + 2B \end{cases}$$

da cui

$$A = 0 \qquad \text{e} \qquad B = 1'000 \ .$$

Si ottiene così:

$$a_k = 1'000 \cdot 2^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

ossia le prede raddoppiano il loro numero di generazione in generazione (*crescita esponenziale*).
Per i predatori risulta poi:

$$b_k = \frac{1}{50} \cdot a_{k-1} - \frac{1}{200} \cdot a_k = 5 \cdot 2^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Da osservare che basta una piccola modifica ai valori iniziali per avere un andamento completamente diverso della crescita delle due popolazioni. Scegliendo per esempio le condizioni iniziali $a_0 = 1'000$ e $a_1 = 1'900$ si troverà $A = -100$ e $B = 1'100$, da cui

$$a_k = -100 \cdot 3^k + 1'100 \cdot 2^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si verifica facilmente che le prede scompaiono ($a_k < 0$) dopo solo sei generazioni.

Esercizio 1.2.2. Studiare, usando MAPLE, l'andamento delle soluzioni del modello dell'esempio 1.2.4 in funzione della scelta valori iniziali a_0 e a_1: provare con diverse coppie di valori iniziali e rappresentare graficamente le soluzioni; interpretare poi tali grafici.

– ————————————

1.3 Equazioni alle differenze lineari inomogenee di secondo ordine

– ————————————

Possiamo scrivere un'equazione alle differenze lineare inomogenea di secondo ordine nella forma

$$y_{n+1} = b \cdot y_n + c \cdot y_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \dots, \quad b, d \in \mathbb{R}^*, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Come per le equazioni del primo ordine, si può dimostrare che l'insieme delle soluzioni della (1.15) è dato dalla somma di una soluzione particolare della (1.15) con tutte le soluzioni della relativa equazione omogenea

$$y_{n+1} = b \cdot y_n + c \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad b \in \mathbb{R}^*, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Per ottenere una soluzione particolare della (1.15) scegliamo, come già fatto in precedenza, una soluzione costante $y_n = \alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); deve dunque valere

$$\alpha = b \cdot \alpha + c \cdot \alpha + d,$$

e cioé

$$\alpha = \frac{d}{1 - (b + c)} \,.$$

Dobbiamo distinguere i casi seguenti:

- se $b + c \neq 1$ allora
$$y_n = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
è effettivamente una soluzione costante.

- se $b + c = 1$, sostituiamo $b = 1 - c$ nella (1.15):
$$y_{n+1} = (1 - c) \cdot y_n + c \cdot y_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$
ossia
$$y_{n+1} - y_n = -c \cdot (y_n - y_{n-1}) + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Ponendo
$$z_n := y_n - y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
si ottiene l'equazione alle differenze lineare inomogenea di primo grado
$$z_{n+1} = -c \cdot z_n + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$
che, come visto nel paragrafo precedente, ha la soluzione particolare (costante)
$$z_n = \frac{d}{1 + c}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad c \neq -1.$$
Siccome
$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = y_n - y_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$
e scegliendo $y_0 = 0$ (possiamo fare questa scelta perché ci interessa una qualunque soluzione particolare della (1.15)) otteniamo la soluzione particolare
$$y_n = \frac{n \cdot d}{1 + c}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad c \neq -1.$$
Se invece $c = -1$, e quindi $b = 2$, l'equazione (1.15) si può scrivere come
$$y_{n+1} - y_n = y_n - y_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$
cioé
$$z_{n+1} = z_n + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Una soluzione particolare dell'ultima equazione è $z_n = d$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e quindi, con $y_0 = 0$, segue:
$$y_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = d + 2d + 3d + \ldots + n \cdot d, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
da cui
$$y_n = \frac{d \cdot n \cdot (n + 1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Per la soluzione generale della (1.15) vale dunque:

Teorema 1.3.1. *Le successioni che soddisfano l'equazione alle differenze lineare inomogenea di secondo ordine*

$$y_{n+1} = b \cdot y_n + c \cdot y_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \dots, \quad b, d \in \mathbb{R}^*, \quad c \in \mathbb{R}$$

possono essere scritte nella forma

$$y_n = \overline{y}_n + y_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove $\overline{y}_n$ *è una soluzione particolare e* y_n^* *è una soluzione della relativa equazione omogenea*

$$y_{n+1} = b \cdot y_n + c \cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad b \in \mathbb{R}^*, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.3.1. L'evoluzione di una popolazione è descritta dall'equazione

$$y_{n+1} = y_n - y_{n-1} + 2, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.17}$$

In ogni intervallo di tempo, di lunghezza 1, nascono due giovani animali (o $2'000$, se l'unità di misura è $1'000$) e dal momento n al momento $n+1$ ne muoiono tanti quanti ne erano presenti al momento $n-1$. Fissiamo $y_0 = 2$ e $y_1 = 3$ e studiamo lo sviluppo della popolazione.
Mediante l'equazione alle differenze (1.17) calcoliamo dapprima:

$$y_2 = 3, \quad y_3 = 2, \quad , y_4 = 1, \quad y_5 = 1, \quad y_6 = 2, \quad y_7 = 3, \quad \dots$$

Poiché

$$y_6 = y_0, \quad y_7 = y_1, \quad \dots$$

si ripetono ancora gli stessi valori: abbiamo così una *soluzione periodica* di *periodo* 6 (poiché $y_{n+6} = y_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$).
Una soluzione particolare è

$$\overline{y}_n = 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

mentre l'equazione omogenea relativa

$$y_{n+1} = y_n - y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ha l'equazione caratteristica

$$q^2 - q + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono date da

$$q_1 = \frac{1 + \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 - \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

La soluzione generale dell'equazione (1.17) è dunque

$$y_n = 2 + A \cdot \left(\frac{1 + \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1 - \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^n, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Con $y_0 = 2$ e $y_1 = 3$ possiamo ricavare A e B:

$$\begin{cases} 2 = 2 + A + B \\ 3 = 2 + A \cdot \dfrac{1 + \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{3} + B \cdot \dfrac{1 - \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{3} \end{cases} ,$$

da cui

$$A = -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}, \qquad B = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}.$$

La soluzione esplicita della (1.17) è dunque:

$$\begin{aligned} y_n &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} \cdot \left[\left(\frac{1 + \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^n \right] = \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} \cdot [(\cos 60^\circ + \mathbf{i} \sin 60^\circ)^n - (\cos 60^\circ - \mathbf{i} \sin 60^\circ)^n] = \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i} \cdot [\cos(n60^\circ) + \mathbf{i} \sin(n60^\circ) - \cos(n60^\circ) + \mathbf{i} \sin(n60^\circ)] = \\ &= 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin(n60^\circ) . \end{aligned}$$

Osservazione 1.3.1. Malgrado nei nostri calcoli precedenti siano entrati in gioco i numeri complessi, alla fine abbiamo ottenuto ancora dei numeri reali (come deve essere per delle quantità che rappresentano una popolazione): i numeri complessi sono un comodo strumento di calcolo, come potremo constatare nuovamente più avanti nello studio delle equazioni differenziali e non una teoria matematica astratta senza alcuna applicazione pratica e neppure uno strumento di tortura per gli studenti liceali!

1.4 Equazioni alle differenze non lineari del primo ordine

Nella risoluzione delle equazioni alle differenze lineari del tipo (1.3) la soluzione costante

$$y_n = \alpha, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

svolgeva un ruolo importante. Questa soluzione stazionaria è detta *soluzione stazionaria* o *punto d'equilibrio* del sistema dinamico.
Se y_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ è una soluzione della (1.3) e vale la condizione $|q| < 1$, dove q è una radice dell'equazione caratteristica, allora

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \alpha.$$

Se questo valore α viene raggiunto per dei valori iniziali y_0 che appartengono ad un intorno I di α si dice che l'equilibrio è *asintoticamente stabile*: ciò significa che quando il sistema viene leggermente distolto da un suo punto d'equilibrio, esso tende a ritornarvi. Se invece il sistema, dopo essersi spostato, anche solo leggermente, continua ad allontanarsi, si dirà che in quel punto l'equilibrio è *instabile*.

Osservazione 1.4.1. Il comportamento di un sistema dinamico può essere immaginato come una pallina che viene fatta rotolare su un plastico, nel quale le buche rappresentano i punti d'equilibrio stabili e i picchi indicano i punti d'equilibrio instabili.

Per le equazioni del tipo (1.3) la condizione $|q| < 1$ è necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica. Si può verificare facilmente che:

- se $0 \leq q < 1$ allora $y_n \to \alpha$ in modo monotono;
- se $-1 < q < 0$ allora $y_n \to \alpha$ in modo oscillatorio.

Esercizio 1.4.1. Risolvere e rappresentare graficamente la soluzione dell'equazione

$$y_{n+1} = -0.4 \cdot y_n + 2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

con la condizione iniziale $y_0 = 10$.

Consideriamo ora una forma più generale di un'equazione alle differenze del prime ordine:

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.18}$$

dove f è una funzione reale. In generale f non ha carattere lineare o affine ed è quindi detta *equazione alle differenze non lineare del primo ordine.*

Osservazione 1.4.2. Da notare che la successione definita dalla (1.18) può anche essere scritta nella forma seguente:

$$y_0, \quad y_1 = f(y_0), \quad y_2 = f(f(y_0)), \quad y_3 = f(f(f(y_0))), \ldots$$

Esempio 1.4.1. (Modello logistico discreto)
La densità di una popolazione in un certo habitat può essere descritta al momento $t = n$ con y_n, dove

$$y_{n+1} - y_n = r \cdot y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.19}$$

r è il *tasso d'incremento demografico* (differenza tra il tasso di natalità e il tasso di mortalità) che per semplicità si può supporre costante. In questo caso si ottiene il *modello malthusiano*

$$y_{n+1} = (1 + r) \cdot y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(da notare che con il modello malthusiano si può descrivere anche l'evoluzione di un capitale y_0 con un tasso d'interesse composto r).

In un qualsiasi ecosistema, nel quale il territorio e le risorse alimentari sono limitate, è plausibile ammettere che il tasso di crescita diminuisca al crescere della densità di individui presenti nel territorio stesso.
Un modello che tiene conto di questi fattori è descritto dall'*equazione logistica* (formulata da Verhulst nel 1836)

$$y_{n+1} - y_n = r \cdot \left(1 - \frac{y_n}{K}\right) \cdot y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

cioè

$$y_{n+1} = (1 + r) \cdot y_n - \frac{r}{K} \cdot y_n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.20}$$

In questa equazione r rappresenta il *tasso di crescita intrinseca* e K è chiamata *capacità portante* che, a dipendenza delle caratteristiche di un certo habitat, stabilisce il punto d'equilibrio del sistema dinamico.
Se la capacità portante è grande e la densità della popolazione è ridotta la crescita resta, con buona approssimazione, malthusiana (il termine $\frac{y_n^2}{K}$ è molto piccolo e quindi trascurabile).
L'equazione logistica (1.20) non può essere risolta esplicitamente, ma è unicamente possibile calcolare tutti i termini y_n in modo ricorsivo. Questa impossibilità di dare una soluzione esplicita si incontra nella maggior parte dei problemi non lineari: la matematica offre però strumenti per ottenere delle proprietà delle soluzioni anche quando queste non sono conosciute esplicitamente.
Per analizzare il comportamento dell'equazione logistica (1.20) vediamo due possibili approcci: uno geometrico e l'altro analitico.

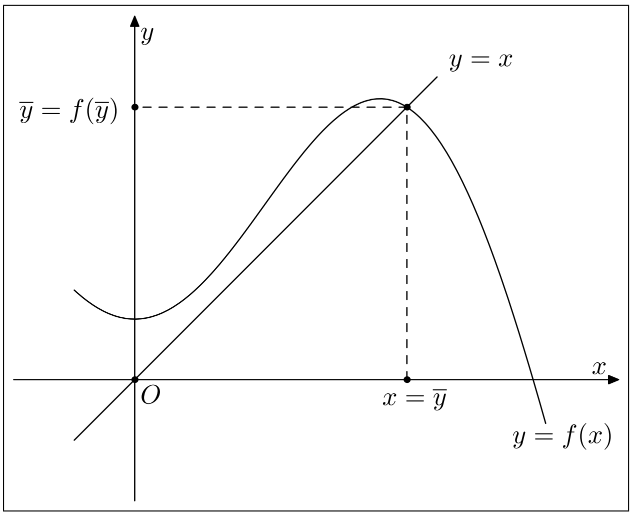

Figura 1.1: Punto fisso di una funzione.

1. Approccio geometrico.

L'*equilibrio* di un sistema dinamico descritto dall'equazione (1.18) è un valore $\overline{y} \in \mathbb{R}$ per il quale vale

$$y_n = \overline{y}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dunque

$$\overline{y} = f(\overline{y}).$$

L'equilibrio è cioè un *punto fisso* della funzione f (vedi figura 1.1).

Nel caso dell'equazione logistica (1.20) la funzione f è una parabola aperta verso il basso (vedi figura 1.2).

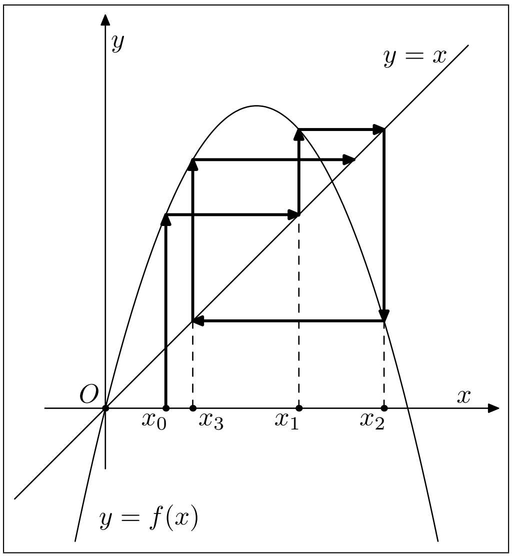

Figura 1.2: Iterazione grafica.

Dalla figura 1.2 si può notare che:

- se $0 < y_0 < K \cdot (1 + \frac{1}{r})$ allora y_n tende verso l'equilibrio K con andamento oscillatorio: $\lim_{n\to\infty} y_n = K$.
- se $y_0 > K \cdot (1 + \frac{1}{r})$ allora si va verso la *catastrofe*, cioè verso l'estinzione della popolazione.

2. Approccio analitico.

   Il metodo consiste nel determinare una soluzione particolare (un equilibrio) e nello studiare come reagisce il sistema a perturbazioni sufficientemente piccole.

   Nel caso dell'equazione logistica prendiamo in essame la natura dell'equilibrio $\overline{y} = K$: consideriamo dei valori iniziali y_0 vicini a K e ci chiediamo se l'evoluzione della popolazione andrà verso la situazione di equilibrio oppure se ne allontanerà.

Se la funzione f è derivabile essa può essere approssimata, in un intorno di K, dalla sua linearizzazione ($y = f(x)$ è sostituita dalla sua tangente nel punto $x = K$):

$$f(x) \approx f(K) + f'(K) \cdot (x - K).$$

Poiché

$$f(K) = K \qquad \text{e} \qquad f'(K) = 1 + r - 2r = 1 - r$$

l'equazione (1.20) linearizzata diventa

$$y_{n+1} = K + (1 - r) \cdot (y_n - K), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

cioè

$$y_{n+1} - K = (1 - r) \cdot (y_n - K), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

che è un'equazione lineare del tipo (1.3).

$y_n - K$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), è una successione geometrica di ragione $1 - r$, dunque se vale la condizione $|1 - r| < 1$ segue $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = K$.
L'equilibrio $\overline{y} = K$ dell'equazione logistica è *asintoticamente stabile* se $0 < r < 2$.

Osservazione 1.4.3. La condizione $|1-r| < 1$ può anche essere espresa come $|f'(K)| < 1$.

Teorema 1.4.1 (Teorema di stabilità asintotica). *Sia $\overline{y} \in \mathbb{R}$ un equilibrio dell'equazione*

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dove f è una funzione reale continua e derivabile in un intorno $I(\overline{y})$. Allora:

1. *se $|f'(\overline{y})| < 1$ esiste un intorno $I(\overline{y})$ tale che per $n = 0, 1, 2, \ldots$:*

   $$y_0 \in I(\overline{y}) \quad \Longrightarrow \quad y_n \in I(\overline{y})$$

   ossia:

   $$y_0 \in I(\overline{y}) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$$

   (dunque $\overline{y}$ è asintoticamente stabile*);*

2. *se $|f'(\overline{y})| > 1$ l'equilibrio $\overline{y}$ è* instabile*;*

3. *se $|f'(\overline{y})| = 1$ non si può concludere nulla sulla stabilità del sistema (non si hanno sufficienti informazioni).*

Dimostrazione. 1. Visto che f è derivabile vale:

$$f(y) = f(\overline{y}) + f'(\overline{y}) \cdot (y - \overline{y}) + (y - \overline{y}) \cdot \varepsilon(y), \qquad \text{con } \lim_{y\to\overline{y}} \varepsilon(y) = 0\ .$$

Poiché $\overline{y} = f(\overline{y})$ l'equazione $y_{n+1} = f(y_n)$ può essere scritta nella forma

$$y_{n+1} - \overline{y} = f'(\overline{y}) \cdot (y_n - \overline{y}) + (y_n - \overline{y}) \cdot \varepsilon(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots ;$$

dato che $|f'(\overline{y})| < 1$ e $\lim_{y \to \overline{y}} \varepsilon(y) = 0$, esistono $\delta > 0$ e $0 < h < 1$ tali che:

$$|y_n - \overline{y}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f'(\overline{y}) + \varepsilon(y_n)| \leq h < 1 \, .$$

Ne risulta che

$$|y_n - \overline{y}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |y_{n+1} - \overline{y}| = |f'(\overline{y}) + \varepsilon(y_n)| \cdot |y_n - \overline{y}| \leq h|y_n - \overline{y}| < |y_n - \overline{y}| < \delta \, .$$

In particolare se $|y_0 - \overline{y}| < \delta$ allora:

$$|y_n - \overline{y}| \leq h^n \cdot |y_0 - \overline{y}| \longrightarrow 0 \, , \qquad \text{per } n \to \infty \, ,$$

ossia

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \overline{y} \, .$$

2. Per esercizio (si procede in modo analogo a quanto fatto sopra: esistono $\delta > 0$, $h > 1$ tali che

$$|y_n - \overline{y}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |y_{n+1} - \overline{y}| \geq h \cdot |y_n - \overline{y}| \text{).}$$

3. Basta considerare gli esempi seguenti:

- $f(y) = y - y^3$, $f'(0) = 1$. Se $0 < y_n < 1$ allora (per induzione):

  $$0 < y_{n+1} = y_n - y_n^3 = y_n \cdot (1 - y_n^2) < y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

  Se $0 < y_0 < 1$ allora y_n è monotona decrescente e limitata, dunque convergente. Dunque $|f'(\overline{y})| = 1$ e $\overline{y}$ è asintoticamente stabile.

- $f(y) = y + y^3$, $f'(0) = 1$. Se $y_n \neq 0$ allora:

  $$|y_{n+1}| = |y_n| \cdot |1 + y_n^2| > |y_n|, \qquad n = 0, 1, 2, \dots ;$$

  in particolare se $y_0 \neq 0$:

  $$|y_n| > |y_0| \cdot |1 + y_n^2|^n \longrightarrow \infty \, , \qquad \text{per } n \to \infty \, .$$

  Dunque $|f'(\overline{y})| = 1$ e $\overline{y}$ è instabile. $\square$

CAPITOLO 2

Equazioni differenziali

2.1 Sistemi dinamici in tempo continuo

Abbiamo visto finora l'evoluzione di un sistema come processo discreto: la dinamica del sistema si supponeva avvenisse a "salti" (giorni, mesi, anni, generazioni, ...). In molti casi tuttavia il processo ha luogo con continuità, o per lo meno può essere considerato tale (moto di un corpo, popolazioni che si modificano molto rapidamente, ...). In questi casi il modello matematico non utilizza più le equazioni alle differenze ma ricorre alle *equazioni differenziali*.

Illustriamo il passaggio dal discreto al continuo con l'esempio dell'equazione logistica

$$y_{n+1} - y_n = r y_n \left(1 - \frac{y_n}{K}\right) , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.1}$$

nella quale y_{n+1} va interpretato come $y(t+1)$ e t rappresenta il tempo.

Invece di considerare l'intervallo di tempo unitario, consideriamo l'intervallo di tempo Δt e riscriviamo l'equazione (2.1) con $y(t)$ al posto di y_n e con $\Delta t \cdot r$ al posto del tasso di crescita r:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta t \cdot r \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) ,$$

da cui

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = r \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) . \tag{2.2}$$

Visto che il tempo t, a differenza di n che era un numero naturale, assume valori reali possiamo immaginare che Δt diventi molto piccolo, ossia che $\Delta t \to 0$. L'equazione (2.2) diventa allora:

$$\lim_{\Delta t \to 0} [y(t + \Delta t) - y(t)] = \Delta t \cdot r \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) ,$$

ossia:

$$\dot{y} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{2.3}$$

nella quale si usa la convenzione $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
La (2.3) è un'*equazione differenziale del primo ordine* poiché contiene la derivata prima della variabile e non contiene derivate di ordine superiore.
L'equazione logistica, quando la capacità portante è illimitata (cioè quando $K \to \infty$) si trasforma nell'equazione malthusiana

$$\dot{y} = ry\ . \tag{2.4}$$

Questa equazione indica che la velocità di variazione di una grandezza è direttamente proporzionale alla grandezza stessa e questa è una caratteristica di molti sistemi dinamici (per esempio: il decadimento radioattivo oppure la crescita libera di popolazioni).

2.2 Risoluzione delle equazioni malthusiana e logistica

Consideriamo l'equazione differenziale (2.4) con la condizione iniziale $y(0) = y_0 > 0$. Essa è detta, oltre che di primo ordine, anche *lineare*, poiché il secondo membro è una funzione lineare, e *omogenea*.
Il metodo che applichiamo per risolvere la (2.4), che può essere utilizzato anche per risolvere le equazioni differenziali non lineari come la (2.3), è detto *metodo di separazione delle variabili*. Dapprima si fa in modo che la y appaia solo al primo membro dell'equazione:

$$\frac{\dot{y}}{y} = r\ .$$

Dal calcolo differenziale sappiamo poi che

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|y(t)|$$

e

$$r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rt + k)$$

da cui segue

$$\ln|y(t)| = rt + k\ .$$

La condizione iniziale $y(0) = y_0$ permette poi di calcolare il valore della costante k:

$$\ln|y_0| = k\ .$$

La soluzione della (2.4) sarà dunque:

$$y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{rt}\ . \tag{2.5}$$

Osservazione 2.2.1. Nella (2.5) abbiamo tralasciato il valore assoluto poiché siamo interessati a soluzioni positive.

Esempio 2.2.1 (Le falsificazioni di Van Meegeren). Nel 1945, alla fine della Seconda guerra mondiale, il pittore olandese Van Meegeren fu arrestato poiché sospettato di aver venduto al gerarca nazista Goering la *Donna presa in alduterio*, un quadro di Jan Vermeer (pittore olandese del XVII secolo). Dopo esser stato accusato di collaborazionismo con i nazisti Van Meegeren cominciò a diffondere, dalla prigione, la notizia che la *Donna presa in alduterio*, *I discepoli di Emmaus* e altri presunti quadri di Vermeer erano dei falsi, dipinti da lui stesso. Solo grazie alla chimica si riuscì a stabilire, nel 1967, che *I discepoli di Emmaus* era un falso (nel frattempo un famoso museo aveva pagato 170'000$ questo quadro, ritenendolo autentico!).
Dal numero di atomi di sostanze radioattive presenti nella pittura, come l'ossido di piombo, si può stabilire se un quadro è veramente antico oppure se è un falso. Se $N(t)$ rappresenta il numero di atomi presenti nella sostanza in esame al momento t, allora $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ rappresenta la velocità di decadimento che, come è noto dalla chimica, è proporzionale a N, con una costante di proporzionalità $\lambda > 0$ dipendente dalla sostanza:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \ .$$

La soluzione di quest'ultima equazione è

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \ .$$

Da essa possiamo calcolare il tempo t^* di dimezzamento della sostanza in questione:

$$\frac{N(t^*)}{N_0} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}}{N_0} = \frac{1}{2} \ ,$$

da cui si ricava:

$$t^* = \frac{\ln 2}{\lambda} \ .$$

Per esempio:

sostanza	t^* (in anni)
carbonio–14	5568
piombo–210	22
uranio–213	$4.5 \cdot 10^{12}$

I valori di λ e di N si possono ottenere facilmente, mentre N_0 è un'incognita, ma ci sono metodi indiretti per trovarlo.

Consideriamo ora l'equazione logistica (2.3), con la condizione iniziale $y(0) = y_0 > 0$. Dividendola per $\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ si ottiene:

$$\frac{\dot{y}}{y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)} = r \ ,$$

cioè

$$\frac{\dot y}{y} + \frac{\dot y}{K-y} = r \;;$$

ma

$$\frac{\dot y}{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln |y(t)|$$

e

$$\frac{\dot y}{K-y} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln |K - y(t)| \;;$$

dunque la (2.3) può essere scritta nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln|y| - \ln|K-y|) = r$$

da cui

$$\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = rt + l \;.$$

Per $t = 0$ si ottiene

$$\ln\left|\frac{y_0}{K-y_0}\right| = l,$$

quindi

$$\frac{y}{K-y} = \frac{y_0}{K-y_0} \cdot \mathrm{e}^{rt} \;,$$

da cui segue la soluzione

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K-y_0)\cdot \mathrm{e}^{-rt}} \;.$$

2.3 Equazioni differenziali del primo ordine

Definizione 2.3.1. Un'*equazione differenziale del primo ordine* è un'equazione del tipo

$$y' + a(x)\cdot y = f(x) \;, \qquad y(0) = y_0 \tag{2.6}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni continue.

Visto che i modelli che prenderemo in esame saranno, in generale, sistemi dinamici, possiamo considerare come variabile dipendente della (2.6) il tempo t e dunque riscriverla nella forma

$$\dot y + a(t)\cdot y = f(t) \;, \qquad y(0) = y_0 \tag{2.7}$$

Definizione 2.3.2. Se nell'equazione (2.7) vale $f(t) \equiv 0$ allora essa si dice *omogenea*, altrimenti *inomogenea*.

Consideriamo dapprima il caso $a(t) = a =$ costante e $f(t) = f =$ costante, ossia l'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\dot{y} + ay = f\ , \qquad y(0) = y_0\ . \tag{2.8}$$

Come per le equazioni alle differenze la soluzione di (2.8) si ottiene trovando dapprima la soluzione dell'equazione omogenea

$$\dot{y} + ay = f\ , \qquad y(0) = 0\ ,$$

che è

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-at}\ .$$

Un metodo per determinare la soluzione dell'equazione inomogenea è chiamato *metodo della variazione della costante* e consiste nel considerare la costante d'integrazione C come una funzione del tempo e riscrivere poi la (2.8):

$$\dot{y} = \dot{C} \cdot \mathrm{e}^{-at} - aC \cdot \mathrm{e}^{-at}\ ,$$

dunque

$$\dot{C} \cdot \mathrm{e}^{-at} - a\underbrace{C \cdot \mathrm{e}^{-at}}_{=y} + ay = f\ ,$$

da cui

$$\dot{C} = f \cdot \mathrm{e}^{at}$$

e, integrando:

$$C(t) = \frac{f}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + K\ .$$

Se ne ricava così la soluzione

$$y(t) = \left(\frac{f}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + K\right) \cdot \mathrm{e}^{-at} = K \cdot \mathrm{e}^{-at} + \frac{f}{a}$$

e, considerando poi che dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$ segue

$$y_0 = K + \frac{f}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad K = y_0 - \frac{f}{a}\ ,$$

si ottiene che la soluzione della (2.7) sarà:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{f}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{-at} + \frac{f}{a}\ .$$

Esempio 2.3.1 (Infusione costante di sostanze farmaceutiche nel corpo). Indichiamo con $y = y(t)$ la quantità della sostanza presente nel corpo al tempo t; il processo è descritto con l'equazione differenziale

$$\dot{y} = -ky + v\ , \qquad y(0) = y_0\ ,$$

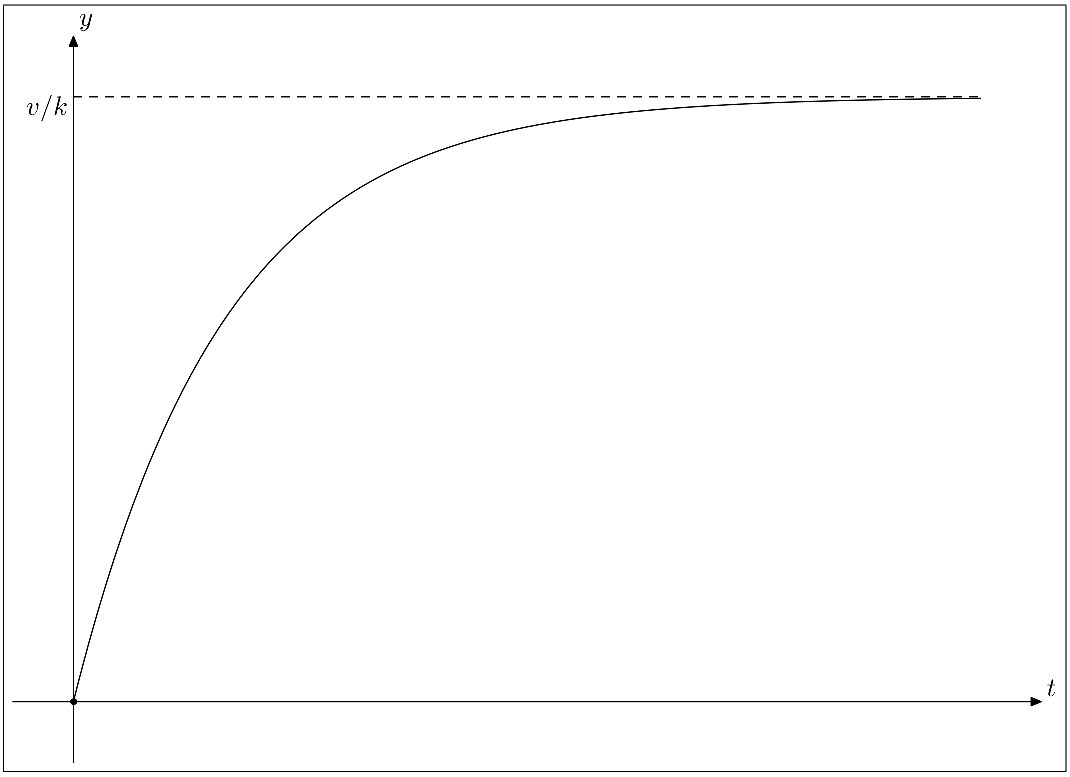

Figura 2.1: Infusione costante di sostanze farmaceutiche nel corpo.

dove k è il tasso di eliminazione della sostanza e v è il tasso di immissione costante. Se all'inizio del processo si può considerare $y_0 = 0$, la soluzione diventa (vedi figura 2.1):

$$y(t) = \frac{v}{k} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) \ .$$

I coefficienti a e f sono però spesso variabili nel tempo perché legati a condizioni ambientali (temperatura, stagioni, ...). Anche in questo caso si risolve dapprima l'equazione omogenea:

$$\dot{y} = -a(t) \cdot y \ ,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(t)\ \mathrm{d}t \ ,$$

e quindi

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

e si applica poi il metodo della variazione della costante:

$$\dot{C} \cdot \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t} - a(t) \cdot C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t} = -a(t)y + f(t) \ ;$$

dunque

$$\dot{C} = f(t) \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

e, integrando, si ottiene la soluzione

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{-\int a(t)\ \mathrm{d}t} \cdot \int f(t) \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t\ .$$

Esempio 2.3.2 (Circuiti elettrici semplici). Consideriamo un circuito elettrico con una resistenza R, un induttore L e una batteria E posti in serie.
Sappiamo che:

1. La batteria E fornisce una forza elettromotrice data da
$$E = E_0 \cdot \cos \omega t\ .$$
2. Un induttore di induttanza L produce una tensione E_L che vale
$$E_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ .$$
3. Una resistenza R si oppone al passaggio di corrente, creando una tensione E_R data da
$$E_R = R \cdot I\ .$$

La legge di Kirchhoff stabilisce che la somma algebrica delle cadute di tensioni presenti in un circuito elettrico chiuso è nulla (la forza elettromotrice E fornita dalla batteria è uguale alla caduta di tensione provocata dalla resistenza e dall'induttore):

$$E_R + E_L - E = 0\ ,$$

cioè

$$R \cdot I + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - E_0 \cdot \cos \omega t = 0\ ,$$

ossia

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{E_0}{L} \cdot \cos \omega t\ .$$

Risolviamo l'ultima equazione rispetto a $I = I(t)$. La relativa equazione omogenea

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L} \cdot I$$

possiede la soluzione

$$I(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

e, con il metodo della variazione della costante, si ottiene:

$$\dot{C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} - \frac{R}{L} \cdot C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{E_0}{L} \cdot \cos \omega t\ ,$$

da cui

$$\dot{C} = \frac{E_0}{L} \cdot \cos \omega t \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t} \ .$$

Si ha così

$$C(t) = \frac{E_0}{L} \cdot \int \cos \omega t \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t} \ \mathrm{d}t$$

e, integrando per parti:

$$C(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} \cdot (R \cdot \cos \omega t + L \cdot \omega \cdot \sin \omega t) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t} + K \ .$$

Dunque:

$$I(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} \cdot (R \cdot \cos \omega t + L \cdot \omega \cdot \sin \omega t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

e, con la condizione iniziale $I(0) = 0$, si ricava la soluzione

$$I(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} \cdot \left(R \cdot \cos \omega t + L \cdot \omega \cdot \sin \omega t - R \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) \ .$$

—

2.4 Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine

—

Esempio 2.4.1 (Eliminazione in due fasi di una sostanza organica). La sostanza y_1 viene trasformata, per via di certi enzimi dell'organismo, dapprima in una forma y_2 che verrà poi eliminata attraverso una membrana cellulare (vedi figura 2.2).

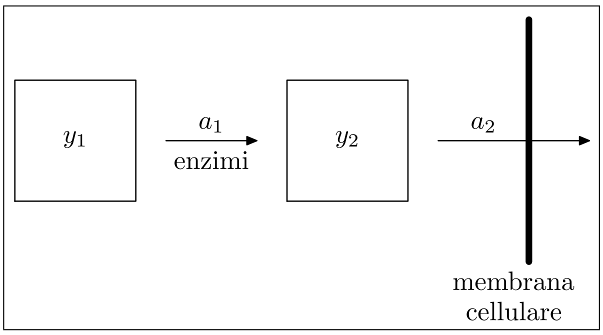

Figura 2.2: Eliminazione in due fasi di una sostanza organica.

Ammettendo che il processo avvenga come reazione chimica di primo ordine si può formulare il sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -a_1 y_1 \ , & y_1(0) = A \\ \dot{y}_2 = a_1 y_1 - a_2 y_2 \ , & y_2(0) = 0 \end{cases} \ . \tag{2.9}$$

La prima equazione ha soluzione

$$y_1(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-a_1 t}$$

che, inserita nella seconda, fornisce

$$\dot{y_2} = A \cdot a_1 \cdot \mathrm{e}^{-a_1 t} - a_2 y_2 \ .$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine con soluzione

$$y_2(t) = \frac{A \cdot a_1}{a_1 - a_2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-a_2 t} - \mathrm{e}^{-a_1 t}\right) \ .$$

Definizione 2.4.1. Un *sistema di equazioni differenziali simultanee del primo ordine* ha la forma generale

$$\begin{cases} \dot{y_1} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dot{y_2} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y_n} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \ . \tag{2.10}$$

Se le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono lineari nelle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ il sistema è detto *lineare*; se le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ non dipendono dal tempo il sistema è detto *autonomo*.

Il sistema (2.10) può essere scritto utilizzando la forma vettoriale

$$\dot{Y} = F(t, Y) \ ,$$

con

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad F = \begin{pmatrix} f_1(t, Y) \\ f_2(t, Y) \\ \vdots \\ f_n(t, Y) \end{pmatrix}$$

Esempio 2.4.2. Il sistema (2.9) può essere riscritto nella forma

$$\dot{y} = Ay \ ,$$

con

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \ .$$

Un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a due incognite può essere scritto nella forma

$$\dot{y} = Ay \ , \qquad \text{con } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} \ , \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{2.11}$$

Per analogia al caso unidimensionale cerchiamo anche qui soluzioni nella forma

$$y = k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \ ,$$

cioè

$$y_1 = k_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \text{e} \qquad y_2 = k_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \ .$$

Sostituendo in (2.11) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = k_1 \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = a \cdot k_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + b \cdot k_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \\ \dot{y_2} = k_2 \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = c \cdot k_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + d \cdot k_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} ak_1 + bk_2 = \lambda k_1 \\ ck_1 + dk_2 = \lambda k_2 \end{cases} \tag{2.12}$$

che, in forma matriciale, diventa

$$A\vec{k} = \lambda \vec{k} \ .$$

Se esistono $\vec{k} \neq \vec{0}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ con queste proprietà diremo che λ è un *valore proprio* (o *autovalore*) e $\vec{k}$ è un *vettore proprio* (o *autovettore*) della matrice A.
Il sistema (2.12) può essere scritto nella forma

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} a-\lambda \\ c \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} b \\ d-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ammette la soluzione $\vec{k} \neq \vec{0}$ se e solo se i vettori $\begin{pmatrix} a-\lambda \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d-\lambda \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti, cioè se il loro determinante è nullo:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^2 - (a+d) \cdot \lambda + ad - bc = 0$$

(nota: tale equazione è detta *equazione caratteristica*). Per ciascuna delle soluzioni λ_1 e λ_2 dell'equazione caratteristica si determina un corrispondente vettore proprio $\vec{v_1}$, rispettivamente $\vec{v_2}$; grazie alla linearità del sistema ne segue la soluzione

$$y(t) = \alpha \cdot \vec{v_1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \cdot \vec{v_2} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \ .$$

Si potrebbe ottenere il caso particolare $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. In questo caso si può dimostrare che la soluzione generale è della forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \ .$$

Esempio 2.4.3. Risolviamo il sistema (2.9) con l'aiuto dei vettori. L'equazione caratteristica è:

$$(-a_1 - \lambda) \cdot (-a_2 - \lambda) - 0 \cdot a_1 = 0$$

e fornisce le soluzioni $\lambda_1 = -a_1$ e $\lambda_2 = -a_2$, dalle quali si ricavano i vettori propri

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_1}{a_1 - a_2} \end{pmatrix}$$

relativo al valore proprio λ_1 e

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

relativo al valore proprio λ_2. Si ottengono così le soluzioni

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-a_1 t} \\ y_2(t) = \dfrac{a_1}{a_1 - a_2} \cdot C_1 \cdot \mathrm{e}^{-a_1 t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-a_2 t} \end{cases} .$$

Inserendo le condizioni iniziali $y_1(0) = A$ e $y_2(0) = 0$ si ha:

$$\begin{cases} A = -C_1 \\ 0 = \dfrac{a_1}{a_1 - a_2} \cdot C_1 - C_2 \end{cases}$$

da cui

$$C_1 = A \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{A \cdot a_1}{a_1 - a_2} .$$

Infine:

$$\begin{cases} y_1(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-a_1 t} \\ y_2(t) = \dfrac{A \cdot a_1}{a_1 - a_2} \cdot (\mathrm{e}^{-a_2 t} - \mathrm{e}^{-a_1 t}) \end{cases} .$$

Esercizio 2.4.1. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali:

1. $\begin{cases} \dot{y_1} = 2y_2 \,, & y_1(0) = 1 \\ \dot{y_2} = -y_1 - 3y_2 \,, & y_2(0) = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{y_1} = y_2 \,, & y_1(0) = 1 \\ \dot{y_2} = -y_1 \,, & y_2(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{y_1} = y_1 y_2 \,, & y_1(0) = 0 \\ \dot{y_2} = 4y_1 - 3y_2 \,, & y_2(0) = -1 \end{cases}$

2.5 Punti stazionari e stabilità

Definizione 2.5.1. Una soluzione di un'equazione differenziale si dice *stazionaria* se le derivate di questa soluzione si annullano.

Nell'equazione logistica

$$\dot{y} = r \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

si possono determinare i punti stazionari ponendo $\dot{y} = 0$; si otterranno le due soluzioni stazionarie

$$\bar{y}_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{y}_2 = k\ .$$

Per caratterizzare un sistema è interessante conoscere, oltre che le soluzioni stazionarie, il suo comportamento quando si introducono delle perturbazioni vicine ad un punto stazionario. Analogamente a quanto visto per le equazioni alle differenze, è interessante conoscere la stabilità delle soluzioni stazionarie.
Per analizzare la stabilità di un punto stazionario si introducono delle piccole deviazioni da esso, cioè

$$y(t) = \bar{y} + u(t)\ , \qquad \text{con } u(t) \ll 1\ .$$

Consideriamo il caso dell'equazione logistica. Riscrivendo l'equazione differenziale si ha:

$$\dot{u} = r \cdot \left(1 - \frac{\bar{y} + u}{k}\right) \cdot (\bar{y} + u) = r \cdot \left(1 - \frac{\bar{y}}{k}\right) \cdot \bar{y} + u \cdot r \cdot \left(1 - \frac{2\bar{y}}{k}\right) - \frac{u^2}{k} \cdot r\ .$$

Visto che $\bar{y}$ è una soluzione stazionaria, il termine $\left(1 - \frac{\bar{y}}{k}\right) \cdot \bar{y}$ è uguale a 0 e inoltre il termine $-\frac{u^2}{k} \cdot r$ è molto piccolo e può essere trascurato. Si ricava così l'equazione differenziale

$$\dot{u} = u \cdot r \cdot \left(1 - \frac{2\bar{y}}{k}\right)$$

che ha la soluzione

$$u(t) = u_0 \cdot \mathrm{e}^{\left(1 - \frac{2\bar{y}}{k}\right) \cdot t}\ .$$

Se $\bar{y} = 0$, $u(t)$ cresce esponenzialmente, dunque il sistema deviato leggermente dal punto stazionario si allontana sempre più: questo punto è *instabile*.
Se invece $\bar{y} = k$, $u(t)$ decresce esponenzialmente e tende a 0: questo punto d'equilibrio si dice *stabile*.

2.6 Il modello preda–predatore di Volterra–Lotka

Questo modello, ormai settantenne ma sempre valido, già visto in forma più semplice con le equazioni alle differenze, descrive le interazioni tra due popolazioni, una preda e l'altra predatrice. Il sistema è descritto da due equazioni differenziali non lineari:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \cdot (a_1 - b_1 \cdot y), & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = y \cdot (-a_2 + b_2 \cdot x), & y(0) = y_0 \end{cases}$$

$x = x(t)$ è la densità della popolazione preda il cui tasso di mortalità è proporzionale alla presenza del predatore $y = y(t)$; quest'ultimo ha il tasso di crescita proporzionale alla presenza delle prede $x = x(t)$.
Le soluzioni stazionarie sono:

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0) \qquad \text{e} \qquad (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right) .$$

Per analizzare la loro stabilità introduciamo delle piccole deviazioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + u(t) \,, & u(0) = u_0 \ll 1 \\ y(t) &= \bar{y} + v(t) \,, & v(0) = v_0 \ll 1 \,. \end{aligned}$$

Riscriviamo il sistema con questa ipotesi e otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{\bar{x}} + \dot{u}) = \dot{u} = (\bar{x} + u) \cdot (a_1 - b_1 \cdot (\bar{y} + v)) = \\ &= \bar{x} \cdot (a_1 - b_1 \cdot \bar{y}) + u \cdot (a_1 - b_1 \cdot \bar{y}) - b_1 \cdot \bar{x} \cdot v - b_1 \cdot u \cdot v = \\ &= u \cdot (a_1 - b_1 \cdot \bar{y}) - b_+ \cdot \bar{x} \cdot v \\ \dot{y} &= \dot{v} = (\bar{y} + v) \cdot (-a_2 + b_2 \cdot (\bar{x} + u)) = v \cdot (-a_2 + b_2 \cdot \bar{x}) + b_2 \cdot \bar{y} \cdot u \end{aligned}$$

che sono due equazioni differenziali lineari.
Per il punto stazionario $\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$ otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\dfrac{b_1 \cdot a_2}{b_2} \cdot v \,, & u(0) = u_0 \\ \dot{v} = \dfrac{b_2 \cdot a_1}{b_1} \cdot u \,, & v(0) = v_0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare, già visto in precedenza, che possiede la soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= \ldots \\ v(t) &= \ldots \end{aligned}$$

che rivela l'instabilità del punto stazionario $\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$:

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \ldots$$

2.7 Stabilità di sistemi lineari

Definizione 2.7.1. Una soluzione di un'equazione differenziale si dice *asintoticamente stabile* se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \bar{y}$$

per ogni soluzione con

$$|y(0) - \bar{y}| < \delta \; .$$

Nei sistemi lineari $\dot{y} = Ay$ la soluzione generale è data dalla combinazione lineare dei termini $a(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i \cdot t}$ dove $a(t)$ sono polinomi in t e $\lambda_i \in \mathbb{C}$ i valori propri della matrice A. Possiamo così formulare il seguente teorema:

Teorema 2.7.1. *Ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione $\dot{y} = Ay$ è stabile se tutti i valori propri di A hanno parte reale negativa.*

Nella (2.9) la matrice $A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ possedeva i valori propri $\lambda_1 = -a_1$ e $\lambda_2 = -a_2$: la soluzione stazionaria $(0, 0)$ è dunque asintoticamente stabile.

2.8 Stabilità di sistemi non lineari

La stabilità di sistemi non lineari può essere analizzato riconducendosi a quella dei sistemi lineari attraverso una linearizzazione del sistem non lineare nell'intorno della soluzione (sviluppo in serie di Taylor).

Teorema 2.8.1. *Sia dato un sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\dot{Y} = F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \; ,$$

dove le funzioni componenti di F, $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ posseggono derivate parziali di secondo ordine continue. Allora la soluzione stazionaria del sistema è asintoticamente stabile se le parti reali dei valori propri della matrice di Jacobi *J nel punto $\bar{Y}$*

$$J(\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{\bar{Y}}$$

sono tutte negative.

Esempio 2.8.1. Consideriamo il *modello competitivo di Volterra*

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= (r_1 - g_1 \cdot (h_1 \cdot y_1 + h_2 \cdot y_2)) \cdot y_1 \\ \dot{y_2} &= (r_2 - g_2 \cdot (h_1 \cdot y_1 + h_2 \cdot y_2)) \cdot y_2 \end{cases}$$

La crescita delle due popolazioni porta ad una diminuzione delle risorse, proporzionalmente alla concentrazione delle popolazioni con i fattori h_1, rispettivamente h_2. Questa diminuzione agisce diversamente sulle due speci, da cui l'introduzione dei coefficienti g_1 e, rispettivamente, g_2.

Se vogliamo analizzare la stabilità del punto stazionario $\left(0, \dfrac{r_2}{g_2 \cdot h_2}\right)$ determiniamo la matrice di Jacobi:

$$\begin{aligned} J(\bar{Y}) &= \begin{pmatrix} r_1 - 2g_1 \cdot h_1 \cdot \bar{y}_1 - g_1 \cdot h_2 \cdot \bar{y}_2 & -g_1 \cdot h_2 \cdot \bar{y}_1 \\ -g_2 \cdot h_1 \cdot \bar{y}_2 & r_2 - 2g_2 \cdot h_2 \cdot \bar{y}_2 - g_2 \cdot h_1 \cdot \bar{y}_1 \end{pmatrix}_{\left(0, \frac{r_2}{g_2 \cdot h_2}\right)} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \cdot \frac{g_1}{g_2} & 0 \\ -\frac{h_1}{h_2} \cdot r_2 & -r_2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

I suoi valori propri sono:

$$\lambda_1 = r_1 - r_2 \cdot \frac{g_1}{g_2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -r_2 \; .$$

λ_2 è sempre negativo, mentre λ_1 è negativo se

$$\frac{r_1}{r_2} < \frac{g_1}{g_2} \qquad (\text{ o se } \quad \frac{r_2}{g_2} > \frac{r_1}{g_1} \;)$$

che porta al criterio seguente:

> due diverse popolazioni che vivono nello stesso habitat e si nutrono delle stesse risorse non possono coesistere in un equilibrio stabile. La popolazione che ha il rapporto $\frac{r}{g}$ maggiore si imporrà sull'altra.