Claudio Marsan

Il problema delle monete e della bilancia

LICEO CANTONALE DI MENDRISIO

ANNO SCOLASTICO 1992-1993

Dispense per il corso di matematica applicata della classe 3C, Liceo cantonale di Mendrisio, anno scolastico 1992-1993.

Ultima modifica: 15 giugno 2003.

Indice

1. Il problema.

Date n monete, $n \geq 3$, di cui una pesa γ_1 e le altre pesano γ_2 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$) e una bilancia (ad un piatto, tipo bilancia Mettler), stabilire il numero minimo di pesate $\psi(n)$ necessarie per determinare γ_1 e γ_2 e per identificare la moneta che pesa γ_1 (d'ora in avanti chiameremo tale moneta *falsa*).

Considereremo unicamente i sistemi di pesate *non adattabili*: in tali sistemi la scelta delle monete da pesare non dipende dagli esiti delle pesate precedenti.

Prima di addentrarci nel calcolo di $\psi(n)$ vediamo un paio di esercizi sulle pesate.

Esercizio 1. Supponiamo di avere n monete, $n \geq 3$, di cui una pesa γ_1 e le altre pesano γ_2, $\gamma_1 > \gamma_2$ e di conoscere γ_1 e γ_2. Quante pesate sono necessarie per individuare la moneta che pesa γ_1 e quale strategia bisogna adottare? ☺

Esercizio 2. In un'industria dolciaria ci sono dieci macchine che producono lo stesso tipo di cioccolatini alla nocciola, ciascuno del peso di 10 grammi. Un giorno si scopre che una macchina produce dei cioccolatini che pesano 11 grammi. Qual è il numero minimo di pesate necessario per scoprire quale macchina produce i cioccolatini più pesanti e quale strategia bisogna adottare? ☺

2. Proprietà generali dei sistemi di pesate.

Definizione. Sia $M := \{1,2,\ldots,n\}$, $n \geq 3$, l'insieme delle monete. Si dice *pesata* un qualsiasi sottoinsieme non vuoto T di M. Indicheremo con $|T|$ il numero di elementi di T.

Definizione. Siano $T_1, T_2, \ldots, T_k (k > 0)$ delle pesate. Si dice *sistema di pesate* la k-upla

$$W(n,k) := (T_1, T_2, \ldots, T_k)\,.$$

È chiaro che, in un sistema di pesate, non si pesa due volte lo stesso insieme di monete (ossia: $T_i \neq T_j$ per $i \neq j$). Tra tutti i sistemi di pesate, chiameremo *ideali* quelli che permettono sia di determinare il peso di tutte le monete che di individuare la moneta falsa.

Un sistema di pesate ideale deve soddisfare le condizioni seguenti:

(w1) OGNI MONETA FA PARTE DI ALMENO UNA PESATA
(altrimenti: se ci fosse una moneta che non viene mai pesata, allora il suo peso non sarebbe determinabile se essa fosse la moneta falsa).

(w2) PER OGNI COPPIA DI MONETE DISTINTE ESISTE UNA PESATA CHE CONTIENE UNA DELLE DUE MONETE MA NON L'ALTRA (altrimenti: se ci fossero due monete che vengono sempre pesate contemporaneamente (o sempre non pesate contemporaneamente) e una di queste è la moneta falsa, allora quest'ultima non è distinguibile).

(w3) SE UNA MONETA FA PARTE DI OGNI PESATA, ALLORA NON TUTTE LE PESATE DEVONO AVERE LO STESSO NUMERO DI MONETE
(altrimenti: se la moneta falsa fa parte di ogni pesata e tutte le pesate hanno lo stesso numero di monete, allora la moneta falsa non è distinguibile).

È evidente che $2 \leq \psi(n) \leq n$ $(n \geq 3)$. Prima di determinare com'è possibile calcolare $\psi(n)$ nel caso generale, vediamo com'è possibile calcolarlo in alcuni casi particolari.

3. Tre monete.

Lemma 1. Date tre monete, di cui una pesa γ_1 e le altre due pesano γ_2 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), il numero minimo di pesate necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è 3. Ossia:

$$\psi(3) = 3.$$

Dimostrazione. Siccome $2 \leq \psi(3) \leq 3$ è sufficiente mostrare che $\psi(3) \neq 2$.
Ammettiamo che $W(3,2) = (T_1, T_2)$ sia un sistema di pesate ideale. Dalla **(w1)** segue che $T_1 \cup T_2 = M$ e, se $T_1 \neq M$ e $T_2 \neq M$, allora risultano $1 \leq |T_1| \leq 2$ e $1 \leq |T_2| \leq 2$.
Se $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ allora una delle due pesate deve contenere due monete: la **(w2)** non è dunque soddisfatta. Se invece $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$ allora deve essere $|T_1| = |T_2| = 2$: la **(w3)** non è dunque soddisfatta.
Allora $W(3,2)$ non è un sistema di pesate ideale. Quindi $\psi(3) \neq 2$, da cui $\psi(3) = 3$. □

Esercizio 3. Determinare esplicitamente alcuni sistemi di pesate del tipo $W(3,3)$. ☺

4. Quattro monete.

Lemma 2. Date quattro monete, di cui una pesa γ_1 e le altre tre pesano γ_2 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), il numero minimo di pesate necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è 4. Ossia:

$$\psi(4) = 4.$$

Dimostrazione. Siccome $2 \leq \psi(4) \leq 4$ è sufficiente mostrare che $\psi(4) \neq 2$ e $\psi(4) \neq 3$.

(a) Mostriamo dapprima che $\psi(4) \neq 2$.
Ammettiamo che $W(4,2) = (T_1, T_2)$ sia un sistema di pesate ideale. Dalla **(w1)** segue che $T_1 \cup T_2 = M$ e, se $T_1 \neq M$ e $T_2 \neq M$, allora risultano $1 \leq |T_1| \leq 3$ e $1 \leq |T_2| \leq 3$.

Se $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ allora una delle due pesate deve contenere una moneta e l'altra tre oppure entrambe contengono due monete: in ogni caso la **(w2)** non è soddisfatta. Se invece $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$ allora non può essere $|T_1 \cap T_2| = 1$ poiché la **(w2)** non sarebbe soddisfatta e non può essere $|T_1 \cap T_2| = 2$ poiché la **(w3)** non sarebbe soddisfatta.
Allora $W(4,2)$ non è un sistema di pesate ideale. Quindi $\psi(4) \neq 2$.

(b) Consideriamo ora i sistemi di pesate del tipo $W(4,3)$.
Grazie alle condizioni **(w1)**, **(w2)** e **(w3)** tra tutti i sistemi di pesate $W(4,3)$ molti devono essere esclusi poiché non sono ideali. Tuttavia esistono sistemi, quali il seguente,

$$W(4,3) = (T_1, T_2, T_3) \text{ con } T_1 = \{1,2,3\},\ T_2 = \{1,4\},\ T_3 = \{2\} \qquad \textbf{(@)}$$

che soddisfano le condizioni **(w1)**, **(w2)** e **(w3)** ma che non sono ideali (confronta esercizio 4).
Da questo esempio possiamo concludere che le condizioni **(w1)**, **(w2)** e **(w3)** sono necessarie ma non sufficienti. Dobbiamo quindi interrompere la nostra dimostrazione per riprenderla in seguito, dopo aver trovato una condizione di sufficienza per i sistemi di pesate ideali. È necessaria però una matematizzazione del problema. ($\square$)

Esercizio 4. Considerare il sistema di pesate **(@)**, con il peso di T_1 uguale a 7, il peso di T_2 uguale a 4 e il peso di T_3 uguale a 3. Mostrare che le soluzioni "$\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 3$" (ossia la moneta 1 è falsa) e "$\gamma_1 = 3$ e $\gamma_2 = 2$" (ossia la moneta 2 è falsa) sono entrambe accettabili, conseguentemente il sistema di pesate **(@)** non è ideale. ☺

Definizione. Sia $W(n,k) := (T_1, T_2, \ldots, T_k)$ un sistema di pesate. Si dice *matrice delle pesate* la matrice $W = (w_{ij})$ di tipo $k \times n$, definita come segue:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } j \in T_i \\ 0, \text{se } j \notin T_i \end{cases} i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n.$$

Le righe di W rappresentano le pesate, le colonne rappresentano le monete.

Esempio 1. La matrice delle pesate del sistema di pesate **(@)** è $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ☑

Una qualsiasi matrice $W = (w_{ij})$ di tipo $k \times n$ con $w_{ij} \in \{0,1\}$ e senza righe nulle definisce un sistema di pesate $W(n,k) := (T_1, T_2, \ldots, T_k)$ per mezzo di $T_i := \{j \mid j \in M, w_{ij} = 1\}, i = 1, \ldots, k$.
Esiste quindi una biezione tra l'insieme dei sistemi di pesate $W(n,k)$ e l'insieme delle matrici $W = (w_{ij})$ di tipo $k \times n$ con $w_{ij} \in \{0,1\}$ e senza righe nulle.

La matrice W può essere anche vista come la matrice di un'applicazione lineare $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ rispetto alle basi canoniche dei due spazi vettoriali. Indichiamo con $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e con $\vec{e}$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ avente tutte le componenti uguali a 1 (nota: $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n$). Come ben sappiamo, la j-esima colonna della matrice W (che denotiamo con $\vec{w}_j$) è data dal prodotto matriciale

$W \cdot \vec{e}_j$. Il vettore $\vec{a} := W \cdot \vec{e}$, detto *vettore delle quantità*, ha come i-esima componente il numero di monete della i-esima pesata T_i (ossia la somma degli elementi della i-esima riga della matrice).

Esempio 2. Consideriamo il sistema di pesate **(@).** Allora: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$, $\vec{a} = W \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ☑

Le condizioni **(w1)**, **(w2)** e **(w3)** possono ora essere riscritte utilizzando il linguaggio delle matrici:

(W1) LA MATRICE DELLE PESATE NON CONTIENE ALCUNA COLONNA AVENTE TUTTE LE COMPONENTI NULLE.

(W2) LE COLONNE DELLA MATRICE DELLE PESATE SONO DIVERSE A DUE A DUE.

(W3) SE LA MATRICE DELLE PESATE CONTIENE UNA COLONNA LE CUI COMPONENTI SONO TUTTE UGUALI A 1, OSSIA SE $\vec{e}$ È UNA COLONNA DELLA MATRICE, ALLORA IL VETTORE DELLE QUANTITÀ $\vec{a}$ NON DEVE ESSERE UN MULTIPLO DI $\vec{e}$.

Esercizio 5. Verificare che le condizioni **(W1)**, **(W2)** e **(W3)** sono soddisfatte dalla matrice delle pesate W dell'esempio 1. ☺

Consideriamo nuovamente il sistema di pesate **(@)** e la sua matrice delle pesate W. Si può notare che

$$2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a} \, ,$$

ossia i vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{a}$ sono linearmente dipendenti. Ciò ci porta a formulare una nuova condizione:

(W4) PER OGNI COPPIA DI VETTORI-COLONNA $\vec{w}_i, \vec{w}_j$, $i \neq j$, DELLA MATRICE DELLE PESATE W I VETTORI $\vec{w}_i, \vec{w}_j, \vec{a}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Esercizio 6. Verificare che dalla condizione **(W4)** seguono le condizioni **(W1)**, **(W2)** e **(W3)**. ☺

Prima di mostrare che la condizione **(W4)** è necessaria affinché un sistema di pesate sia ideale, dobbiamo introdurre alcune notazioni.
Per ogni $j \in M$ sia

$$\Gamma_j := \left\{ \vec{x} \middle| \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+, \gamma_1 \neq \gamma_2, \text{con } \vec{x} = \gamma_2 \vec{e} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{e}_j \right\}$$

l'*insieme delle distribuzioni* dei pesi delle monete, in cui la moneta j è quella falsa, ossia le componenti di $\vec{x} \in \Gamma_j$ sono tutte uguali a γ_2, tranne la j-esima componente che vale γ_1.

Esempio 3. Sia $n = 3$. Allora:

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \middle| \gamma_1, \gamma_2 \in \mathsf{R}^+, \gamma_1 \neq \gamma_2 \right\};$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \middle| \gamma_1, \gamma_2 \in \mathsf{R}^+, \gamma_1 \neq \gamma_2 \right\};$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \middle| \gamma_1, \gamma_2 \in \mathsf{R}^+, \gamma_1 \neq \gamma_2 \right\}. \;\; ☑$$

Esercizio 7. Mostrare che $\Gamma_j = \left\{ \vec{x} \middle| \vec{x} \in \mathsf{R}^n \text{ e } \exists \alpha, \beta \in \mathsf{R}, \alpha > 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta > 0 \text{ con } \vec{x} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{e}_j \right\}$. Riscrivere poi gli insiemi $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dell'esempio 3 tenendo conto della nuova notazione e dare un significato ad α e β. ☺

Definizione. Con $\Gamma := \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ indichiamo l'insieme di tutte le possibili distribuzioni dei pesi delle monete. Per $\vec{x} \in \Gamma$ il vettore $\vec{g} = W \cdot \vec{x}$ è detto *vettore dei pesi* del sistema di pesate relativo alla distribuzione dei pesi delle monete $\vec{x}$. Da notare che la *i*-esima componente di $\vec{g}$ è pari al peso della *i*-esima pesata T_i.

Esempio 4. Consideriamo nuovamente il sistema di pesate **(@)** e sia $\vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}^t \in \Gamma$. Allora:

$$\vec{g} = W \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + 2\gamma_2 \\ 2\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \;\; ☑$$

Teorema 1. La condizione **(W4)** è necessaria affinché un sistema di pesate sia ideale.

Dimostrazione. Sia dato un sistema di pesate ideale $W(n,k)$, con matrice delle pesate W. Ammettiamo che esistano $i, j \in M$ $(i \neq j)$ tali che $\vec{w}_i, \vec{w}_j, \vec{a}$ siano linearmente dipendenti. Siccome il sistema è ideale avremo $\vec{w}_i \neq \vec{0}, \vec{w}_j \neq \vec{0}, \vec{w}_i \neq \vec{w}_j$ (ossia: $\vec{w}_i$ e $\vec{w}_j$ sono linearmente indipendenti, visto che le loro componenti sono 0 o 1) e $\vec{a}$ non è multiplo né di $\vec{w}_i$ né di $\vec{w}_j$. Allora esistono due numeri reali non nulli α, β con $\vec{a} = \alpha\vec{w}_i + \beta\vec{w}_j$. Inoltre:

- non può essere $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ poiché altrimenti $\vec{a}$ avrebbe componenti non positive.

- In ogni caso deve essere $\alpha+\beta>0$. Sia, per esempio, $\alpha>0$. Se $\beta>0$ non c'è più nulla da dimostrare. Sia dunque $\beta<0$. Allora deve essere $\vec{w}_i=\vec{e}$ poiché se una componente di $\vec{w}_i$ fosse nulla, allora $\vec{a}$ avrebbe delle componenti non positive. Dunque le componenti di $\vec{a}$ sono della forma α oppure $\alpha+\beta$.

Per $\alpha>0$ definiamo

$$\vec{x}:=(\alpha+1)\vec{e}-\alpha\vec{e}_i, \vec{y}:=\alpha\vec{e}+\beta\vec{e}_j$$

(se $\beta>0$ basta scambiare i ruoli di α e β). Allora $\vec{x}\in\Gamma_i$, $\vec{y}\in\Gamma_j$ e, siccome $i\neq j$, $\vec{x}\neq\vec{y}$. Ma:

$$\begin{aligned}W\cdot\vec{x} &= W\cdot((\alpha+1)\vec{e}-\alpha\vec{e}_i)=\\ &= (\alpha+1)W\cdot\vec{e}-\alpha W\cdot\vec{e}_i=\\ &= (\alpha+1)\vec{a}-\alpha\vec{w}_i=\\ &= \alpha\vec{a}+\beta\vec{w}_j=\\ &= W\cdot\vec{y}\end{aligned}$$

ossia: $\vec{g}=W\cdot\vec{x}=W\cdot\vec{y}$. Il sistema di pesate non è dunque ideale, in contraddizione con l'ipotesi. La condizione **(W4)** deve quindi essere soddisfatta affinché un sistema di pesate sia ideale. □

Osservazione. La condizione **(W4)**, al contrario delle condizioni **(W1)**, **(W2)** e **(W3)**, è difficile da esprimere secondo una condizione più intuitiva e legata all'esperienza.

Siamo ora in grado di terminare la dimostrazione del lemma 2:

Lemma 2. Date quattro monete, di cui una pesa γ_1 e le altre tre pesano γ_2 ($\gamma_1\neq\gamma_2$), il numero minimo di pesate necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è 4. Ossia:

$$\psi(4)=4.$$

Dimostrazione. Grazie alle condizioni **(W1)** e **(W2)** si ricava subito che $\psi(4)\neq 2$ poiché la matrice delle pesate W di un sistema di pesate $W(4,2)$ deve contenere quattro colonne non nulle e diverse a due a due, da scegliere tra i tre vettori seguenti:

$$\vec{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\vec{c}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Inoltre è $\psi(4)\neq 3$ poiché la matrice delle pesate W di un sistema di pesate $W(4,3)$ deve contenere quattro colonne non nulle e diverse a due a due che possiamo scegliere fra i vettori seguenti:

$$\vec{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\vec{c}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{c}_5=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{c}_6=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{c}_7=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Come già visto, se consideriamo la matrice delle pesate avente come colonne $\vec{w}_1=\vec{c}_4,\vec{w}_2=\vec{c}_5$, $\vec{w}_3=\vec{c}_1,\vec{w}_4=\vec{c}_2$ otteniamo il vettore delle quantità $\vec{a}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$. Però $\vec{a}=2\vec{w}_1+\vec{w}_2$ e dunque la condizione **(W4)** non è soddisfatta. Deve quindi essere $\psi(4)=4$. □

Esercizio 8. Mostrare che, quando $n > 3$, sono necessarie più di due pesate per determinare la moneta falsa e il peso di tutte le monete, ossia:

$$\psi(n) \geq 3, \text{ per } n > 3. \ ☺$$

5. Cinque monete.

Prima di risolvere il problema nel caso di cinque monete, mostriamo che la condizione **(W4)** è sufficiente affinché un sistema di pesate sia ideale.

Teorema 2. La condizione **(W4)** è sufficiente affinché un sistema di pesate sia ideale.

Dimostrazione. La condizione **(W4)** sia soddisfatta. Considerando il risultato dell'esercizio 6 è sufficiente mostrare che la funzione

$$f : \Gamma \subset \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^k, \quad \vec{x} \in \Gamma \mapsto W \cdot \vec{x},$$

determinata dalla matrice delle pesate W del sistema di pesate $W(n,k)$, è iniettiva.
Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma$. Allora esistono $i, j \in M$ con $\vec{x} \in \Gamma_i, \vec{y} \in \Gamma_j$. Si distinguono due casi:

- Caso 1: $i = j$. Siano $\vec{x} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{e}_i$ e $\vec{y} = \alpha^*\vec{e} + \beta^*\vec{e}_i$, con $\alpha > 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta > 0$, $\alpha^* > 0, \beta^* \neq 0$, $\alpha^* + \beta^* > 0$. Dall'uguaglianza $W \cdot \vec{x} = W \cdot \vec{y}$ segue $\alpha\vec{a} + \beta\vec{w}_i = \alpha^*\vec{a} + \beta^*\vec{w}_i$, da cui
$$(\alpha - \alpha^*)\vec{a} + (\beta - \beta^*)\vec{w}_i = \vec{0}.$$
Siccome la condizione **(W4)** è valida, cioè i vettori $\vec{w}_i, \vec{w}_j, \vec{a}$ sono linearmente indipendenti, devono valere $\alpha - \alpha^* = 0$, $\beta - \beta^* = 0$, da cui $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$. Ciò significa però che $\vec{x} = \vec{y}$.
- Caso 2: $i \neq j$. Siano $\vec{x} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{e}_i$ e $\vec{y} = \alpha^*\vec{e} + \beta^*\vec{e}_j$, con $\alpha > 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta > 0$, $\alpha^* > 0, \beta^* \neq 0$, $\alpha^* + \beta^* > 0$. Dall'uguaglianza $W \cdot \vec{x} = W \cdot \vec{y}$ segue $\alpha\vec{a} + \beta\vec{w}_i = \alpha^*\vec{a} + \beta^*\vec{w}_j$, da cui
$$(\alpha - \alpha^*)\vec{a} + \beta\vec{w}_i - \beta^*\vec{w}_j = \vec{0}.$$
Siccome la condizione **(W4)** è valida, cioè i vettori $\vec{w}_i, \vec{w}_j, \vec{a}$ sono linearmente indipendenti, devono valere $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^* = 0$. Ciò è però in contraddizione con $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma$ (infatti deve essere $\beta \neq 0$ e $\beta^* \neq 0$). Allora è $W \cdot \vec{x} \neq W \cdot \vec{y}$.

In entrambi i casi si conclude che *f* è una funzione iniettiva, come volevasi dimostrare. □

Lemma 3. Date cinque monete, di cui una pesa γ_1 e le altre quattro pesano γ_2 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), il numero minimo di pesate necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è 3. Ossia: $$\psi(5) = 3.$$

Dimostrazione. Dall'esercizio 8 segue che $\psi(5) \geq 3$: è quindi sufficiente determinare un sistema di pesate ideale $W(5,3)$. Sia dunque $W(5,3) = (T_1, T_2, T_3)$ con

$$T_1 = \{1,3,4,5\},\ T_2 = \{2,3,5\},\ T_3 = \{4,5\}.$$

La matrice delle pesate e il vettore delle quantità sono:

$$W=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},\quad \vec{a}=W\cdot\vec{e}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che la condizione **(W4)** è soddisfatta; la tesi segue quindi dal teorema 2. □

Esercizio 9. Verificare che la condizione **(W4)** è soddisfatta per il sistema di pesate della dimostrazione del lemma 3. ☺

Vediamo ora come si può determinare praticamente il peso delle monete e la moneta falsa nel sistema di pesate della dimostrazione del lemma 3.

Esempio 5. Sia $W(5,3)=(T_1,T_2,T_3)$ con $T_1=\{1,3,4,5\}$, $T_2=\{2,3,5\}$, $T_3=\{4,5\}$. Il vettore dei pesi sia $\vec{g}=(24\quad 15\quad 14)^t$, ossia il peso di T_1 sia 24, quello di T_2 sia 15 e quello di T_3 sia 14. Per determinare la moneta falsa si potrebbe procedere sistematicamente per tentativi, tuttavia tale procedimento diverrebbe inapplicabile nel caso generale di n monete.
Indichiamo con g_i il peso di T_i e con m_j il peso della moneta j $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4,5)$. Si ottiene allora il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1+m_3+m_4+m_5 &= g_1 \quad (1)\\ m_2+m_3+m_5 &= g_2 \quad (2)\\ m_4+m_5 &= g_3 \quad (3)\end{cases}.$$

Se la moneta 1 fosse quella falsa, allora dalle equazioni (2) e (3) seguirebbe $2g_2-3g_3=0$.
Viceversa, se quest'ultima equazione fosse valida, dalle equazioni (2) e (3) seguirebbe allora $2m_2+2m_3-3m_4-m_5=0$ e, siccome c'è un'unica moneta falsa, avremmo $m_2=m_3=m_4=m_5$, ossia la moneta 1 sarebbe quella falsa.
Un simile ragionamento può essere ripetuto per ogni moneta, ottenendo così le seguenti equazioni (nota: solo una di queste equazioni è valida, più precisamente l'equazione corrispondente alla moneta falsa):

$$\begin{cases} 2g_2-3g_3 &= 0\\ g_1-2g_3 &= 0\\ 2g_1-2g_2-g_3 &= 0\\ 3g_1-2g_2-3g_3 &= 0\\ g_1-2g_2+g_3 &= 0\end{cases}.$$

I coefficienti delle incognite delle equazioni precedenti possono essere riassunti nella matrice

$$I:=\begin{pmatrix}0&2&-3\\1&0&-2\\2&-2&-1\\3&-2&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

La matrice I ha la proprietà seguente: per ogni vettore dei pesi $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^t$ il vettore $I \cdot \vec{g}$ ha esattamente una componente nulla. Inoltre: se la componente nulla di $I \cdot \vec{g}$ è la j-esima, allora la moneta j è quella falsa. Nel nostro caso avremo:

$$I \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che la moneta 4 è quella falsa. Siccome $4 \notin T_2$ avremo $3\gamma_2 = 15$, da cui $\gamma_2 = 5$. Siccome $4 \in T_3$ avremo $\gamma_1 + \gamma_2 = 14$, da cui $\gamma_1 = 9$.
Concludendo: la moneta 4 è falsa e pesa 9, tutte le altre monete pesano 5. ☑

Definizione. Diremo che la matrice I, di tipo $k \times n$, è una *matrice di identificazione* per il sistema di pesate $W(n,k)$ avente matrice delle pesate W, se per ogni vettore dei pesi $\vec{g}$ valgono:
- il vettore $I \cdot \vec{g}$ ha esattamente una componente nulla;
- se la j-esima componente di $I \cdot \vec{g}$ è nulla, allora la moneta j è quella falsa.

Osservazione. Dato un sistema di pesate $W(n,k)$ avente matrice delle pesate W, possono esistere più matrici di identificazione I.

6. Sei monete.

Lemma 4. Date sei monete, di cui una pesa γ_1 e le altre cinque pesano γ_2 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), il numero minimo di pesate necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è 4. Ossia:

$$\psi(6) = 4.$$

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che $\psi(6) > 3$ (siccome $\psi(6) \geq 3$ è sufficiente mostrare che $\psi(6) \neq 3$). Ammettiamo che esista un sistema di pesate ideale $W(6,3)$. Allora W, la matrice delle pesate di tale sistema, possiede come colonne sei dei seguenti sette vettori:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\vec{c}_i$ il vettore che non è presente in W. Si verifica facilmente che $\vec{a} = W \cdot \vec{e} = 4\vec{e} - \vec{c}_i$. Si distinguono due casi:

- Caso 1: $i \neq 7$. Si scelgono $j,k \in M$ tali che $\vec{w}_j = \vec{c}_{7-i}$ e $\vec{w}_k = \vec{c}_7 = \vec{e}$. Allora:

$$\vec{w}_j + \vec{c}_i = \vec{c}_{7-i} + \vec{c}_i = \vec{e} \Rightarrow \vec{w}_j + 3\vec{w}_k = \vec{c}_{7-i} + 3\vec{c}_i = 4\vec{e} - \vec{c}_i = \vec{a} \quad ,$$

ossia: $\vec{w}_j, \vec{w}_k, \vec{a}$ sono linearmente dipendenti e quindi il sistema di pesate $W(6,3)$ non è ideale, in contraddizione con l'ipotesi.

- Caso 2: $i = 7$. Si scelgono $j,k \in M$ tali che $\vec{w}_j = \vec{c}_1$ e $\vec{w}_k = \vec{c}_6$. Allora $\vec{w}_j + \vec{w}_k = \vec{e}$ e quindi

$$3\vec{w}_j + 3\vec{w}_k = 3\vec{e} = 4\vec{e} - \vec{e} = 4\vec{e} - \vec{c}_i = \vec{a}$$

ossia: $\vec{w}_j, \vec{w}_k, \vec{a}$ sono linearmente dipendenti e quindi il sistema di pesate $W(6,3)$ non è ideale, in contraddizione con l'ipotesi.

Quindi: $\psi(6) \neq 3$.
Si può verificare che la matrice delle pesate

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \vec{a} = W \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

soddisfa la condizione **(W4)**. Il sistema di pesate è dunque ideale. Quindi: $\psi(6) = 4$. □

Esercizio 10. Verificare che la condizione **(W4)** è soddisfatta per la matrice *W* della dimostrazione del lemma 4. ☺

Esercizio 11. Il vettore delle pesate relativo al sistema di pesate relativo alla matrice *W* della dimostrazione del lemma 4 sia $\vec{g} = (21 \quad 16 \quad 10 \quad 10)^t$. Determinare la moneta falsa e il peso di ogni le monete. ☺

7. Il caso generale di *n* monete.

Prima di dimostrare il teorema generale ricordiamo il seguente risultato che abbiamo ricavato in precedenza:

> **Teorema 4.** n e k siano due interi con $n \geq 3, k \geq 2$; $W(n,k)$ sia un sistema di pesate con matrice delle pesate *W*. Allora:
> $W(n,k)$ è ideale $\Leftrightarrow$ per ogni $i,j \in M, i \neq j$, i vettori $\vec{w}_i, \vec{w}_j, \vec{a}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" è stata dimostrata nel paragrafo 4; "$\Leftarrow$" è stata dimostrata nel paragrafo 5. □

Sia *x* un numero reale. Indicheremo con $\lceil x \rceil$ il più piccolo numero intero maggiore o uguale ad *x*, e con $\lfloor x \rfloor$ il più grande numero intero minore o uguale ad *x*.

Esempio 6. Sia $x = 3{,}14$. Allora: $\lceil x \rceil = 4$ e $\lfloor x \rfloor = 3$. ☑

Come ben sappiamo ogni numero naturale n può essere rappresentato univocamente nella base 2, ossia:

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(n) \cdot 2^i ,$$

con $d_i(n) \in \{0,1\}$, $\forall i \in \mathrm{N}$ e $d_i(n) = 0, \forall i > \lfloor \log_2 n \rfloor$. Ciò è importante, poiché le colonne di una matrice delle pesate W possono essere viste come rappresentazioni binarie di numeri naturali.

Esempio 7. Sia $n = 13$. Allora: $n = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, ossia $n = (1101)_2$. Quindi:

$$d_0(13) = 1, \quad d_1(13) = 0, \quad d_2(13) = 1, \quad d_3(13) = 1. \ ☑$$

Siamo ora in grado di enunciare il teorema generale per il caso di n monete:

Teorema 5. Date n monete $(n \geq 3)$ di cui una pesa γ_1 e le altre $n-1$ pesano γ_2 $(\gamma_1 \neq \gamma_2)$, il numero minimo di pesate $\psi(n)$ necessario per stabilire γ_1, γ_2 e individuare la moneta falsa è dato da:

$$\psi(3) = 3,\ \psi(4) = 4 \text{ e, per ogni } n \geq 5,\ \psi(n) = \lceil \log_2(n+3) \rceil .$$

Dimostrazione. Sia $n \geq 7$ (gli altri casi sono stati trattati nei paragrafi precedenti), $n = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(n) \cdot 2^i$.
Sia k l'intero per il quale vale $2^{k-1} - 2 \leq n \leq 2^k - 3$. Dobbiamo dimostrare che $\psi(n) = k$.
L'idea consiste nel costruire una matrice W, di tipo $k \times n$, in modo tale che questa soddisfi la condizione **(W4)**. Sia dunque $W = (w_{ij}), i \in \{1,2,\ldots,k\}, j \in M$ definita nel modo seguente:

- se n è pari, cioè $n = 2m$, sia

$$w_{ij} = \begin{cases} d_{i-1}(j), & \text{per } j \in \{1,\ldots,m+1\}, i \in \{1,\ldots,k\} \\ d_{i-1}(2^k - 4 - 2m + j), & \text{per } j \in \{m+2,\ldots,2m-1\}, i \in \{1,\ldots,k\} \\ d_{i-1}(2^k - 3), & \text{per } j = 2m, i \in \{1,\ldots,k\} \end{cases}$$

  (ossia: le prime $m+1$ colonne contengono la rappresentazione binaria dei numeri $1,2,\ldots,m+1$, completata, con degli zeri all'inizio; le colonne dalla $m+2$ alla $2m-1$ contengono la rappresentazione binaria dei numeri da $2^k - 2 - m$ a $2^k - 5$; l'ultima colonna contiene la rappresentazione binaria di $2^k - 3$);

- se n è dispari, cioè $n = 2m+1$, sia

$$w_{ij} = \begin{cases} d_{i-1}(j), & \text{per } j \in \{1,\ldots,m+1\}, i \in \{1,\ldots,k\} \\ d_{i-1}(2^k - 4 - 2m + j), & \text{per } j \in \{m+2,\ldots,2m-1\}, i \in \{1,\ldots,k\} \\ d_{i-1}(2^k - 3), & \text{per } j = 2m, i \in \{1,\ldots,k\} \\ d_{i-1}(2^k - 1), & \text{per } j = 2m+1, i \in \{1,\ldots,k\} \end{cases}$$

(ossia: le prime $m+1$ colonne contengono la rappresentazione binaria dei numeri $1,2,\ldots,m+1$, completata, con degli zeri all'inizio; le colonne dalla $m+2$ alla $2m-1$ contengono la rappresentazione binaria dei numeri da 2^k-2-m a 2^k-5; la penultima colonna contiene la rappresentazione binaria di 2^k-3; l'ultima colonna contiene la rappresentazione binaria di 2^k-1).

Non è difficile mostrare che la condizione **(W4)** è soddisfatta dalla matrice W: essa definisce quindi un sistema di pesate ideale, ossia: $\psi(n) \leq k$.
Si può vedere inoltre che, per $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 3$, vale $\psi(n) \geq k$.
Trattando i casi $n = 2^{k-1}-1$ e $n = 2^{k-1}-2$ come nel paragrafo 6, si può mostrare che $\psi(n) \geq k$.
Quindi: $\psi(n) = k = \lceil \log_2(n+3) \rceil$. □

Esercizio 12. Verificare che la condizione **(W4)** è soddisfatta dalla matrice delle pesate W della dismostrazione del teorema 5. ☺

Esercizio 13. Sfruttando quanto visto nella dimostrazione del teorema 5, costruire la matrice delle pesate W nel caso $n=8$. ☺

Esercizio 14. Sfruttando quanto visto nella dimostrazione del teorema 5, costruire la matrice delle pesate W nel caso $n=13$. ☺

Esercizio 15. Determinare $\psi(n)$ per $n = 3,4,\ldots,50$; $n = 100, 1'000, 10'000$. ☺

Per risolvere praticamente il problema delle pesate è necessario costruire la matrice di identificazione I relativa alla matrice delle pesate W. Il teorema seguente ne garantisce l'esistenza.

Teorema 6. Per ogni sistema di pesate ideale $W(n,k)$, con $n \geq 3$ e $k \geq 2$, esiste una matrice di identificazione.

Dimostrazione. Sia W la matrice delle pesate del sistema di pesate ideale $W(n,k)$. Allora esistono dei vettori $\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_n \in \mathbb{R}^k$ con:

- $\vec{z}_j \cdot \vec{a} = 0, \forall j \in M$;
- $\vec{z}_j \cdot \vec{w}_j = 0, \forall j \in M$;
- $\vec{z}_j \cdot \vec{w}_i \neq 0, \forall i \in M - \{j\}, \forall j \in M$.

La matrice di identificazione I del sistema di pesate dato è quella matrice avente per righe i vettori $\vec{z}_1,\ldots,\vec{z}_n$. □

Esercizio 16. Date 13 monete e il vettore delle pesate $\vec{g} = \begin{pmatrix} 48 & 35 & 30 & 38 \end{pmatrix}^t$ determinare la moneta falsa e il peso di tutte le monete. ☺