

Claudio Marsan

---

Interpolazione e approssimazione polinomiale

---

LICEO CANTONALE DI MENDRISIO  
ANNO SCOLASTICO 2001–2002

Dispense per la parte matematica del corso di *Fisica e applicazioni della matematica* delle classi 3BC, Liceo cantonale di Mendrisio, anno scolastico 2001–2002.

Questo testo è stato scritto dall'autore con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ .

## INDICE

1. Introduzione	1
2. Il problema dell'interpolazione	2
3. Il metodo della matrice di Vandermonde	5
4. Il metodo d'interpolazione di Lagrange	8
5. Interpolazione di Hermite	12
6. Polinomi di Bézier	14
7. Curve di Bézier	18

## 1. INTRODUZIONE

Il problema dell'*approssimazione di una funzione* si presenta spesso in matematica applicata:

determinare una funzione  $g(x)$  che meglio approssimi una funzione  $f(x)$  e che possieda certe proprietà stabilite a priori (generalmente le informazioni disponibili su  $f(x)$  sono solo parziali).

Si presentano i seguenti problemi di approssimazione:

- (1) La funzione  $f(x)$  non è razionale, ma possiede alcune proprietà di continuità e derivabilità che permettono di scriverne lo sviluppo di Taylor, oppure possiede delle proprietà più specifiche (come periodicità, simmetria, ...). In questo caso si tratta di determinare una funzione  $g(x)$  che risulta più facilmente calcolabile di  $f(x)$ .
- (2) Della funzione  $f(x)$  si conoscono solamente i valori in un numero discreto di punti  $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  (caso tipico che si incontra nell'analisi di dati sperimentali). Si vuole trovare la funzione  $g(x)$  che meglio approssima la  $f(x)$  sul più piccolo intervallo che contiene tutti gli  $x_k$ . Si possono presentare vari casi:
  - il numero di dati disponibili è piccolo, come nello studio di alcuni fenomeni fisici o biologici;
  - il numero di dati disponibili è molto elevato, come di solito accade nelle analisi statistiche;
  - i valori  $f(x_k)$  possono essere affetti da errori di misura limitati e con una distribuzione abbastanza regolare, come accade di solito per i dati rilevati in laboratorio;
  - i valori  $f(x_k)$  possono essere affetti da errori di misura molto elevati e senza alcuna distribuzione regolare, come può accadere per esempio per un non corretto funzionamento degli strumenti di laboratorio o quando in una indagine economica o demografica i dati vengono rilevati in modo errato.

Nel seguito studieremo dei metodi per ricostruire funzioni delle quali non si conosce altro che qualche punto del grafico. Questo tipo di problema capita spesso nelle scienze applicate o sperimentali, dove si studiano fenomeni che, quando vengono osservati, danno luogo a tabelle simili alla seguente:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

TABELLA 1.

Nella tabella  $x$  e  $y$  rappresentano le due *variabili* ( $x$  è la *variabile indipendente*,  $y$  è la *variabile dipendente*) che compaiono nel fenomeno, alle quali siamo interessati per scoprire la relazione che le unisce. Le coppie  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , sono i valori osservati sperimentalmente.

Data una tabella come la tabella 1 possiamo porci le domande seguenti:

- (1) fissato un valore  $x^*$  della variabile indipendente, con  $x_k < x^* < x_{k+1}$ , è possibile avere una stima  $y^*$  della corrispondente variabile dipendente?
- (2) Esiste una funzione  $y = f(x)$  tale che risulti

$$y_k = f(x_k) \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n?$$

Una simile funzione è detta *funzione interpolatrice* e il suo grafico *curva interpolatrice* dei dati della tabella.

- (3) Se non esiste o non è possibile determinare una funzione interpolatrice, esiste una funzione che approssima nel “modo migliore” i dati sperimentali?

**Osservazione 1.** La funzione interpolatrice non è unica. Infatti se  $f(x)$  è una tale funzione, ossia se vale

$$y_k = f(x_k), \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n$$

allora si verifica facilmente che anche

$$g(x) := f(x) + \lambda(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

è una funzione interpolatrice.

**Esempio 1.** Nella tabella 2 sono riassunte le rilevazioni di temperatura, fatte in ore diverse del giorno.

ora del rilevamento	8	9	11	13	17
temperatura in °C	12	13	16	18	17

TABELLA 2.

Stimare “intelligentemente” la temperatura che faceva a mezzogiorno o in una qualsiasi ora compresa nell’intervallo  $]8, 17[$  è un *problema di interpolazione*, mentre descrivere la temperatura prima delle ore 8 oppure oltre le ore 17 è un *problema di estrapolazione*.

## 2. IL PROBLEMA DELL’INTERPOLAZIONE

Nella sua forma generale, il problema dell’*interpolazione* di una funzione può essere posto nel modo seguente:

- (1) Della funzione reale  $f(x)$  sono noti i valori

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n),$$

con

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

I punti  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  sono detti *punti d’appoggio* (o *nodi* o *punti base*) dell’*interpolazione*.

(2) È fissato un insieme di  $n + 1$  funzioni

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x),$$

definite e linearmente indipendenti su  $[a, b]$ , ossia per ogni  $x \in [a, b]$  vale:

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0 \iff c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0.$$

(3) Si tratta di determinare una funzione

$$g(x) = \alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \dots + \alpha_n\phi_n(x)$$

tale che

$$g(x_0) = y_0, g(x_1) = y_1, \dots, g(x_n) = y_n.$$

La scelta delle funzioni  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  è molto importante e deve tener conto delle proprietà di  $f(x)$ . I criteri di scelta per tali funzioni sono spesso dettati dalla facilità di calcolo e dalle proprietà di regolarità: per questo motivo le funzioni razionali e le funzioni trigonometriche sono quelle maggiormente utilizzate.

Noi ci occuperemo in particolare di *interpolazione polinomiale*, ossia sceglieremo

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \dots, \phi_n(x) = x^n.$$

Il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione, afferma, in sostanza, che è sempre possibile approssimare uniformemente una funzione continua mediante un polinomio.

**Teorema 1** (Teorema dell'approssimazione di Weierstrass). *Data la funzione reale  $f(x)$  continua su  $[a, b]$  e fissato un  $\varepsilon > 0$  qualsiasi, esiste sempre un polinomio  $p(x)$  tale che*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Purtroppo il teorema 1 non dà informazioni su  $p(x)$  né tantomeno suggerisce come determinarne il grado e i coefficienti. Alcune dimostrazioni costruttive del teorema forniscono effettivamente un polinomio, ma solitamente esso è inutilizzabile a fini pratici perché di grado più elevato del necessario (con l'aumentare del grado il grafico di una funzione polinomiale tende ad assumere un carattere oscillatorio, cosa spesso non desiderata!).

La conoscenza del valore di una funzione  $f(x)$  e delle sue prime derivate in un punto  $a$  permette di stimare  $f(x)$  per le  $x$  vicino ad  $a$ . Se la  $f(x)$  soddisfa particolari ipotesi essa si esprimere può come *serie di Taylor* (o *serie di Mac Laurin* nel caso  $a = 0$ ):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots$$

Troncando dopo un certo numero di termini la serie di Taylor (o la serie di Mac Laurin) otteniamo, in alcuni casi particolari, un polinomio che approssima la  $f(x)$ . Le serie di Taylor saranno trattate nel corso di matematica. Qui diamo soltanto alcuni esempi interessanti.

**Esempio 2.** Sviluppo di alcune funzioni come serie di Mac Laurin:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

**Esercizio 1.** Troncare le formule dell'esempio 2 dopo 3 termini e calcolarne il valore nel punto  $x = 0.001$  (attenzione: calcolatrice in radianti!). Ripetere l'esercizio troncando le serie di Mac Laurin dopo 4 e 5 termini. Confrontare i risultati con quelli dati dalla calcolatrice.

Con MAPLE V RELEASE 6 si può ottenere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione  $f(x)$  nel punto  $x = a$  mediante il comando

```
taylor(f(x), x = a, n);
```

dove  $n$  è il grado a partire dal quale tutti i termini vengono tralasciati.

Con le calcolatrici della famiglia TEXAS INSTRUMENTS TI-92 si può ottenere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione  $f(x)$  nel punto  $x = a$  mediante il comando

```
taylor(f(x), x, n, a)
```

dove  $n$  è il grado (massimo) del polinomio che approssimerà  $f(x)$ .

**Esempio 3.** Per ottenere con MAPLE V la serie di Mac Laurin della funzione  $\ln(1 + x)$  fino al termine di grado minore di 6 basterà impartire il comando:

```
taylor(ln(1 + x), x = 0, 6);
```

Si otterrà:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^6).$$

Per ottenere con la TI-92 la serie di Mac Laurin della funzione  $\ln(1 + x)$  fino al termine di grado 6 basterà impartire il comando:

```
taylor(ln(1 + x), x, 6, 0)
```

Si otterrà:

$$-\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x.$$

Il seguente teorema (di cui non diamo la dimostrazione) ci dice come fare e come stimare l'errore commesso localmente in determinati casi particolari del teorema 1.

**Teorema 2** (Teorema di Taylor). *Sia  $f(x)$  una funzione reale continua e derivabile  $n + 1$  volte nell'intervallo  $[a, b]$  e sia  $t \in [a, b]$ . Si costruisca il polinomio*

$$p(x) := f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Allora per ogni  $x \in [a, b]$  esiste un numero  $\xi$ , dipendente da  $x$  e strettamente compreso tra  $t$  e  $x$ , tale che

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1}.$$

**Osservazione 2.** Il polinomio  $p(x)$  del teorema 2 è detto *polinomio di Taylor* di grado  $n$  di  $f(x)$  nel punto  $t$  ed ha la particolarità che il suo valore e i valori delle sue prime  $n$  derivate coincidono con i corrispondenti valori di  $f(x)$  nel punto  $t$ .

### 3. IL METODO DELLA MATRICE DI VANDERMONDE

Vogliamo risolvere il seguente problema, noto come *curve fitting*:

dati  $n + 1$  punti di ascisse distinte, trovare una curva che passi per questi punti.

Se abbiamo due punti di ascisse distinte, è facile vedere che una soluzione del problema è data dalla retta passante per i due punti (ossia da un polinomio di grado 1); se abbiamo tre punti di ascisse distinte (e non allineati) una soluzione del problema è data dalla parabola passante per i tre punti (ossia da un polinomio di grado 2).

In generale, dati  $n + 1$  punti di ascisse distinte  $P_k(x_k, y_k)$ , con  $k = 0, 1, \dots, n$ , una soluzione del problema è data dal polinomio di grado  $n$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Per determinare i coefficienti di  $p(x)$  basta risolvere il sistema di  $n + 1$  incognite composto dalle  $n + 1$  equazioni

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Vale il seguente teorema, che sta alla base dell'interpolazione polinomiale.

**Teorema 3.** Sono dati  $n + 1$  punti  $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  con  $x_i \neq x_j$  per  $i \neq j$ . Allora esiste un unico polinomio  $p(x)$  a coefficienti reali con  $\deg(p) \leq n$  tale che

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

e siano

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^t \quad \text{e} \quad \vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)^t$$

rispettivamente i vettori dei coefficienti (incogniti) di  $p(x)$  e delle ordinate (note) dei punti dati. Consideriamo inoltre la matrice seguente, detta *matrice di Vandermonde*:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Per induzione completa verso  $n$  si può dimostrare che

$$\det(V) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n (x_j - x_i).$$

Siccome gli  $x_i$  sono distinti a due a due, segue che

$$\det(V) \neq 0$$

e quindi il sistema lineare di  $n + 1$  equazioni in  $n + 1$  incognite

$$(1) \quad V\vec{a} = \vec{y}$$

possiede esattamente una soluzione (questa è una conseguenza di un noto teorema dell'algebra lineare). Tale sistema è però equivalente a

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Allora il polinomio  $p(x)$  esiste ed è unico. □

**Definizione 1.** Il polinomio  $p(x)$  del teorema 3 è detto *polinomio di interpolazione* e il metodo utilizzato nella dimostrazione sopra per la determinazione dei suoi coefficienti (risoluzione diretta del sistema) è detto *metodo della matrice di Vandermonde* o *metodo dei coefficienti indeterminati*.

**Esempio 4.** Determinare l'equazione di una curva passante per i punti di coordinate

$$(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 7), (5, 9), (6, 13).$$

Ammettiamo che la soluzione del nostro problema sia un polinomio  $p(x)$  di grado 5:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5.$$

Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite:

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 + 1a_1 + 1^2a_2 + 1^3a_3 + 1^4a_4 + 1^5a_5 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 + 2^5a_5 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4 + 3^5a_5 = 6 \\ a_0 + 4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + 4^4a_4 + 4^5a_5 = 7 \\ a_0 + 5a_1 + 5^2a_2 + 5^3a_3 + 5^4a_4 + 5^5a_5 = 9 \\ a_0 + 6a_1 + 6^2a_2 + 6^3a_3 + 6^4a_4 + 6^5a_5 = 13 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (2) è la seguente matrice di Vandermonde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 \end{pmatrix}$$

Il sistema (2) si può risolvere utilizzando il *metodo di eliminazione di Gauss* (ossia riducendo a gradini la matrice incrementata dei coefficienti del sistema). Si ottiene il seguente polinomio interpolatore:

$$p(x) = 23 - \frac{667}{15}x + \frac{385}{12}x^2 - \frac{239}{24}x^3 + \frac{17}{12}x^4 - \frac{3}{40}x^5.$$

Verificare al calcolatore la correttezza del risultato e disegnare il grafico di  $p(x)$ .

Con MAPLE V è facile costruire una matrice di Vandermonde: basta caricare il pacchetto `linalg` e usare il comando `vandermonde([x0, x1, ..., xn])`.

**Esempio 5.** La matrice del sistema (2) si costruisce con i comandi seguenti:

```
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> vandermonde([1, 2, 3, 4, 5, 6]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 2.** Determinare, con l'ausilio del calcolatore, i coefficienti del polinomio  $p(x)$ , con  $\deg(p) \leq 8$ , sapendo che il suo grafico passa per i nove punti

$$(-8, 12), (-6, 23), (-4, 16), (-2, 23), (1, 0), (2, 23), (4, 16), (6, 23), (8, 12).$$

Determinare poi  $p(7)$  e verificare graficamente la soluzione tracciando il grafico di  $p(x)$ .

**Osservazione 3.** Il metodo della matrice di Vandermonde ha valore quasi puramente teorico. Infatti se il numero dei punti di appoggio è più grande di qualche unità, la risoluzione del sistema (1) diventa dispendiosa. Bisogna dunque trovare altri metodi per esprimere il polinomio interpolatore.

## 4. IL METODO D'INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Lagrange scoprì un metodo che permette di valutare un polinomio in un punto senza doverne conoscere i coefficienti e che limita la complessità dei calcoli intermedi.

**Esercizio 3.** Per comprendere l'idea che sta alla base del metodo di Lagrange:

- (1) Costruire un polinomio che si annulla in 2 e in 3.
- (2) Trovare tutti i polinomi di grado 2 che si annullano in 2 e in 3.
- (3) Trovare il polinomio di grado 2 che si annulla in 2 e in 3 e che vale 1 nel punto 6.
- (4) Scrivere il polinomio di grado 2 che vale 1 nel punto  $a$  e che si annulla in due altri valori diversi  $b$  e  $c$ .

La soluzione dell'ultimo punto dell'esercizio precedente è data semplicemente dal polinomio

$$L(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

È dunque facile costruire un polinomio che vale 1 in un certo punto e che si annulla in altri punti. Prendendo delle combinazioni lineari di simili polinomi, Lagrange risolse il problema dell'interpolazione polinomiale.

**Esempio 6.** Vogliamo costruire un polinomio di grado 2 avente il grafico passante per i punti  $P_0(-1, 3)$ ,  $P_1(2, 3)$  e  $P_2(3, -2)$ .

Procediamo come nell'esercizio precedente e costruiamo i polinomi seguenti:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{12},$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} = \frac{(x+1)(x-3)}{-3},$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{4}.$$

Siccome

$$\begin{array}{lll} L_0(-1) = 1, & L_0(2) = 0, & L_0(3) = 0, \\ L_1(-1) = 0, & L_1(2) = 1, & L_1(3) = 0, \\ L_2(-1) = 0, & L_2(2) = 0, & L_2(3) = 1 \end{array}$$

il polinomio cercato sarà

$$p(x) = 3L_0(x) + 3L_1(x) - 2L_2(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}.$$

Se si è interessati al calcolo del valore che  $p(x)$  può assumere in un punto  $x$  (*valore interpolato*), piuttosto che ai suoi coefficienti, risulta conveniente rappresentare  $p(x)$  nella *forma di Lagrange* (si parlerà quindi di *interpolazione di Lagrange*) che illustriamo qui di seguito nel caso generale.

Siano dunque dati gli  $n + 1$  punti d'appoggio

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n), \text{ con } x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Definendo, per  $i = 0, 1, \dots, n$  i *polinomi di Lagrange*

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

o, in forma più compatta,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

si ottiene:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

e quindi

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

è un polinomio con

$$\deg(p) \leq n$$

e con

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n.$$

Tale polinomio è detto *polinomio di interpolazione di Lagrange* ed è unico perché se due polinomi a coefficienti reali e di grado non superiore a  $n$  assumono gli stessi valori in  $n + 1$  punti distinti, essi sono uguali (infatti se  $P(x)$  e  $Q(x)$  sono due polinomi di grado non superiore a  $n$  e con

$$P(x_i) = Q(x_i), \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, \quad (x_i \neq x_j, \text{ per } i \neq j).$$

allora il polinomio

$$D(x) = P(x) - Q(x)$$

sarebbe di grado non superiore a  $n$  e, per costruzione, possederebbe le  $n + 1$  radici distinte  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Ogni polinomio di grado  $n$  ha però esattamente  $n$  radici, reali o complesse. Deve così valere:

$$D(x) = 0, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

da cui si conclude che  $P(x) = Q(x)$ .

Riassumendo possiamo dire di aver dimostrato il teorema seguente:

**Teorema 4** (Formula d'interpolazione di Lagrange). *Dati gli  $n + 1$  punti di appoggio*

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n), \text{ con } x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

*esiste un unico polinomio  $p(x)$  con  $\deg(p) \leq n$  tale che*

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n.$$

Inoltre:

$$(3) \quad p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x),$$

dove

$$(4) \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

**Esempio 7.** Siano dati i punti d'appoggio  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . In questo caso il problema di interpolazione si riduce a determinare un polinomio di primo grado, ossia una funzione lineare, avente il grafico passante per i due punti dati. Si determinano facilmente i due polinomi di Lagrange

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^1 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

e

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

e da questi si ricava il polinomio di interpolazione di Lagrange

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

**Esercizio 4.** Prima dell'avvento delle calcolatrici l'interpolazione lineare era molto usata per determinare i valori non tabulati delle funzioni trigonometriche e logaritmiche.

Sapendo che  $\tan(1.35) = 4.4552$  e  $\tan(1.36) = 4.6734$  determinare, mediante interpolazione lineare, il valore (approssimato) di  $\tan(1.354)$ .

**Esercizio 5.** Sono dati i punti

$$P_0(1, 3), P_1(4, -2), P_2(6, 2), P_3(8, 4).$$

Determinare, con l'ausilio di un calcolatore, un polinomio  $p(x)$  con  $\deg(p) \leq 3$  passante per i punti dati utilizzando il metodo di interpolazione di Lagrange.

**Esercizio 6.** La funzione

$$f(x) = \log(x) - 2 \cdot \frac{x - 1}{x}$$

è da approssimare mediante un polinomio  $p(x)$  con  $\deg(p) \leq 3$  e passante per i punti

$$P_0(1, f(1)), P_1(2, f(2)), P_2(8, f(8)), P_3(10, f(10)).$$

(usare un calcolatore). Calcolare poi  $p(2.9)$  e  $p(5.25)$  e valutare l'errore commesso. Rappresentare graficamente sia  $f(x)$  che  $p(x)$ .

La formula (3) risolve il problema dell'interpolazione per mezzo di una formula esplicita che però, per scopi pratici come il calcolo di un valore interpolato, si rivela poco adatta poiché computazionalmente dispendiosa.

Assumendo  $x \neq x_i$ , per  $i = 0, 1, \dots, n$ , la formula (3) può essere riscritta, utilizzando la (4) come

$$(5) \quad p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^n y_i \frac{1}{x - x_i} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Ponendo

$$(6) \quad \lambda_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(i *coefficienti d'appoggio*  $\lambda_i$  dipendono unicamente dagli  $x_k$ ) e introducendo le grandezze ausiliarie

$$\mu_i := \frac{\lambda_i}{x - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

dipendenti dal valore da interpolare  $x$  nella (5), otteniamo:

$$(7) \quad p(x) = \left( \sum_{i=0}^n \mu_i y_i \right) \cdot \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right).$$

Nel seguito vogliamo liberarci della produttoria che appare nella (7)! Ponendo  $y_i = 1$  (per  $i = 0, 1, \dots, n$ ) nella (7) otteniamo:

$$(8) \quad p(x) = \left( \sum_{i=0}^n \mu_i \right) \cdot \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right),$$

ma anche  $p(x) = 1$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . La (8) diventa dunque

$$1 = \left( \sum_{i=0}^n \mu_i \right) \cdot \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

da cui si ricava

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \mu_i}$$

e quindi otteniamo la *formula baricentrica dell'interpolazione di Lagrange* per il calcolo del valore interpolato  $p(x)$  nel punto  $x$ :

$$(9) \quad p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i y_i}{\sum_{i=0}^n \mu_i}$$

(è una media ponderata degli  $y_i$  con i pesi  $\mu_i$ ). Uno dei vantaggi della formula baricentrica è la sua stabilità numerica; un altro è la sua economicità, soprattutto nel caso di più calcoli di valori interpolati con i medesimi punti d'appoggio.

La tecnica di calcolo per il valore interpolato  $p(x)$  nel punto  $x$  è allora la seguente:

- (1) calcolo degli  $n + 1$  coefficienti d'appoggio  $\lambda_i$  a partire dagli  $x_i$  (formula (6));
- (2) per ogni punto di interpolazione possono essere calcolati successivamente i pesi  $\mu_i$ , formando contemporaneamente le somme della formula (9).

## 5. INTERPOLAZIONE DI HERMITE

Consideriamo il problema seguente:

data una funzione reale  $f(x)$ , continua e derivabile su  $[a, b]$  e dati  $n + 1$  punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

di cui sono noti

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

e

$$y'_0 = f'(x_0), y'_1 = f'(x_1), \dots, y'_n = f'(x_n),$$

determinare un polinomio  $p(x)$  di grado minimale tale che

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$$

e

$$p'(x_0) = y'_0, p'(x_1) = y'_1, \dots, p'(x_n) = y'_n.$$

Geometricamente il problema si può formulare nel modo seguente:

determinare un polinomio  $p(x)$  tale che i grafici di  $p(x)$  e  $f(x)$  siano tangenti negli  $n + 1$  punti d'appoggio dati.

Il problema ha per soluzione un polinomio  $p(x)$ , detto *polinomio di interpolazione di Hermite*. Si può mostrare che

- $p(x)$  è unico;
- $\deg(p) \leq 2n + 1$  (questo perchè ci sono  $2n + 2$  condizioni che devono essere soddisfatte);

- $p(x)$  è dato da

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x)y_i + \sum_{i=0}^n \beta_i(x)y'_i,$$

con

$$\alpha_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)) \cdot (L_i(x))^2$$

e

$$\beta_i(x) = (x - x_i) \cdot (L_i(x))^2,$$

dove  $L_i(x)$  è l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange.

**Osservazione 4.** L'interpolazione di Hermite può essere considerata come un raffinamento dell'interpolazione di Lagrange nel senso seguente:

dati  $n + 1$  punti appartenenti al grafico di una funzione  $f(x)$  che si vuole approssimare, si cerca un polinomio  $p(x)$  tale che il suo grafico non solo passi per gli  $n + 1$  punti dati ma sia addirittura tangente al grafico di  $f(x)$  in tali punti.

L'interpolazione di Hermite si può generalizzare tenendo conto anche delle derivate di ordine superiore: in tal caso però il polinomio di interpolazione di Hermite cresce rapidamente di grado.

Trattiamo brevemente il caso particolare seguente:

dati

$$x_0 < x_1, \quad y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y'_0 = f'(x_0), \quad y'_1 = f'(x_1)$$

determinare un polinomio  $p(x)$  con  $\deg(p) \leq 3$  e con

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p'(x_1) = f'(x_1).$$

Possiamo assumere

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

da cui

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ p'(x_0) = y'_0 \\ p(x_1) = y_1 \\ p'(x_1) = y'_1 \end{cases}$$

che, scritto in forma matriciale, diventa:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}.$$

Fatti i debiti calcoli, si trova il polinomio d'interpolazione di Hermite che evitiamo di scrivere poiché assai complesso.

**Esercizio 7.** Mostrare che la matrice quadrata di ordine 4 del sistema (10) è invertibile.

**Esercizio 8.** Approssimare  $\sin x$  sull'intervallo  $[0, \pi]$  mediante il polinomio d'interpolazione di Lagrange  $L(x)$  e il polinomio d'interpolazione di Hermite  $H(x)$  nei punti d'appoggio di ascissa  $x_0 = 0$  e  $x_1 = \pi$ . Confrontare poi, servendosi di un calcolatore, i grafici di  $\sin x$ ,  $L(x)$  e  $H(x)$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

**Esercizio 9.** Approssimare  $\sin x$  sull'intervallo  $[0, \pi]$  mediante il polinomio d'interpolazione di Lagrange  $L(x)$  e il polinomio d'interpolazione di Hermite  $H(x)$  nei punti d'appoggio di ascissa  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $x_2 = \pi$ . Confrontare poi, servendosi di un calcolatore, i grafici di  $\sin x$ ,  $L(x)$  e  $H(x)$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Si può notare qualcosa di diverso rispetto all'esercizio precedente?

## 6. POLINOMI DI BÉZIER

Da quando è stata introdotta la grafica al calcolatore uno dei problemi maggiori è quello di rappresentare efficacemente curve e superfici.

Particolare importanza assume la definizione interattiva di parti di curve e di superfici: nel caso di una parte di curva si potrebbero richiedere all'utente di un programma di grafica delle proprietà di tangenza o di curvatura; l'effetto di questi parametri non è tuttavia così facile da prevedere.

Nel 1962 Bézier propose un metodo, utilizzato su un sistema CAD UNISURF agli stabilimenti Renault, che permette all'utente di definire una prima approssimazione di una curva mediante punti di controllo; spostando poi alcuni di questi punti si può fare in modo che la curva assuma la forma desiderata.

Il sistema CAD permette di leggere le coordinate dei punti di controllo e, mediante interpolazione polinomiale, si può poi risalire ad una rappresentazione algebrica della curva.

**Definizione 2.** Il polinomio

$$B_i^n(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad x \in [0, 1]$$

è detto *i-esimo polinomio di Bernstein di grado n*,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Esempio 8.** Calcoliamo i polinomi di Bernstein di grado 2:

$$B_0^2(x) = \binom{2}{0} x^0 (1-x)^2 = (1-x)^2;$$

$$B_1^2(x) = \binom{2}{1} x^1 (1-x)^1 = 2x(1-x);$$

$$B_2^2(x) = \binom{2}{2} x^2 (1-x)^0 = x^2.$$

**Osservazione 5.** Si verifica facilmente che gli unici zeri di  $B_i^n(x)$  sono  $x = 0$  con molteplicità  $i$  e  $x = 1$  con molteplicità  $n - i$ .

**Osservazione 6.** I polinomi di Bernstein di grado  $n$  sono positivi (nei punti dove non si annullano) e *scompongono l'unità*, ossia la loro somma dà 1, come si può facilmente verificare applicando la formula del binomio di Newton:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1.$$

**Esercizio 10.** Dimostrare la seguente proprietà di simmetria dei polinomi di Bernstein:

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

**Lemma 1.** *I polinomi di Bernstein assumono il valore massimo in  $x = \frac{i}{n}$ .*

*Dimostrazione.* Distinguiamo i tre casi seguenti:

- (1) Il polinomio di Bernstein  $B_0^n(x) = (1-x)^n$  assume, evidentemente, il suo valore massimo in  $x = 0$ .
- (2) Il polinomio di Bernstein  $B_n^n(x) = x^n$  assume, evidentemente, il suo valore massimo in  $x = 1$ .
- (3) Consideriamo ora i polinomi di Bernstein  $B_i^n(x)$ , con  $0 < i < n$  e ne calcoliamo la funzione derivata.

$$\begin{aligned} (B_i^n(x))' &= \binom{n}{i} \cdot [ix^{i-1}(1-x)^{n-i} + x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}(-1)] = \\ &= \binom{n}{i} \cdot (1-x)^{n-i-1} x^{i-1} \cdot [i(1-x) - x(n-i)] = \\ &= \binom{n}{i} \cdot (1-x)^{n-i-1} \cdot x^{i-1} \cdot (i-nx). \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione

$$(B_i^n(x))' = 0$$

troviamo che le ascisse dei punti estremali sono  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = \frac{i}{n}$ . Dall'osservazione 5 i polinomi  $B_i^n(x)$  si annullano in 0 e 1 e quindi in tali punti essi hanno valore minimale. È allora chiaro che in  $x = \frac{i}{n}$  i polinomi di Bernstein assumono il loro valore massimo. □

Mediante la seguente linea di codice è possibile definire una funzione per il calcolo dell' $i$ -esimo polinomio di Bernstein di grado  $n$  con Maple:

```
> bernsteinP := (i,n,x) -> binomial(n,i)*x^i*(1-x)^(n-i);
```

Mediante la seguente linea di codice è possibile definire una funzione per il calcolo dell' $i$ -esimo polinomio di Bernstein di grado  $n$  con la TI-92:

```
> nCr(n,i)*x^i*(1-x)^(n-i)->bstein(i,n,x)
```

Tale funzione è utile per risolvere i prossimi due esercizi.

**Esercizio 11.** Disegnare, su uno stesso grafico, i polinomi di Bernstein di grado 4 e verificare l'enunciato del lemma precedente.

**Esercizio 12.** Dimostrare che la derivata di un polinomio di Bernstein si può esprimere come differenza di polinomi di Bernstein:

$$(B_i^n(x))' = n(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)), i = 0, 1, \dots, n.$$

**Definizione 3.** Un *polinomio di Bézier di grado  $n$*  è una combinazione lineare di polinomi di Bernstein dello stesso grado:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(x), \quad x \in [0, 1].$$

I punti di coordinate  $(\frac{i}{n}, b_i)$  sono detti *punti di Bézier*: congiungendoli si ottiene il *poligono di Bézier*. I coefficienti  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sono detti *pesi*.

**Esercizio 13.** Sia dato il polinomio di Bézier

$$P(x) = 2B_0^4(x) + \frac{5}{2}B_1^4(x) + \frac{5}{2}B_2^4(x) + B_3^4(x) + \frac{3}{2}B_4^4(x).$$

Disegnare il grafico di  $P(x)$  e il poligono di Bézier.

Il teorema seguente esprime una relazione tra il polinomio di Bézier e il poligono di Bézier:

**Teorema 5.** *Agli estremi dell'intervallo  $[0, 1]$  il grafico di un polinomio di Bézier  $P(x)$  e il poligono di Bézier hanno la stessa pendenza.*

*Dimostrazione.* Sia

$$P(x) = b_0 B_0^n(x) + b_1 B_1^n(x) + \dots + b_{n-1} B_{n-1}^n(x) + b_n B_n^n(x).$$

Allora:

$$\begin{aligned} P'(x) &= b_0 \cdot \binom{n}{0} \cdot n(1-x)^{n-1}(-1) + \\ &+ b_1 \cdot \binom{n}{1} \cdot [(1-x)^{n-1} + x(n-1)(1-x)^{n-2}(-1)] + \\ &+ x(1-x) \cdot (\dots) + \\ &+ b_{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot [(n-1)x^{n-2}(1-x) + x^{n-1}(-1)] + \\ &+ b_n \cdot \binom{n}{n} \cdot nx^{n-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$P'(0) = n(b_1 - b_0) \quad \text{e} \quad P'(1) = n(b_n - b_{n-1}).$$

D'altra parte:

- il coefficiente angolare del segmento che congiunge i punti  $(0, b_0)$  e  $(\frac{1}{n}, b_1)$  è dato da  $n(b_1 - b_0)$ ;

- il coefficiente angolare del segmento che congiunge i punti  $(\frac{n-1}{n}, b_{n-1})$  e  $(1, b_n)$  è dato da  $n(b_n - b_{n-1})$ .

Segue quindi la tesi. □

Il grande vantaggio nell'uso dei polinomi di Bézier (per esempio nella progettazione della carrozzeria, o di parti di essa, di un'automobile) sta nel fatto che i suoi coefficienti non vengono determinati necessariamente mediante lunghi e macchinosi calcoli, ma possono essere ricavati graficamente, procedendo come segue:

- i punti della carrozzeria che si ricavano dalla digitalizzazione sono dapprima trasformati sull'intervallo  $[0, 1]$  e poi visualizzati sullo schermo di un computer;
- i punti di Bézier vengono sistemati "ad occhio" mediante una penna elettronica, prestando attenzione alla giusta pendenza alle estremità degli intervalli;
- il computer calcola il poligono di Bézier e lo visualizza sullo schermo;
- se il costruttore è otticamente soddisfatto dell'andamento della curva, il lavoro per la parte di carrozzeria è terminato; in caso contrario egli può correggerne l'andamento spostando i punti di Bézier (il peso dei singoli polinomi di Bernstein viene così modificato in modo tale che la curva cambia prevalentemente nelle vicinanze dei punti di Bézier spostati).

**Esercizio 14.** Elaborazione bidimensionale del contorno della parte centrale del cofano del motore.

- (1) Dopo la digitalizzazione del contorno si sono ottenute le coordinate seguenti:

$$(0, 27), (10, 30), (30, 32), (60, 34), (80, 36), (95, 40), (100, 43).$$

Riportare i punti in un sistema di coordinate cartesiane.

- (2) Cambiare la scala dell'asse  $x$  in modo da dover considerare solo ascisse nell'intervallo  $[0, 1]$ . Mostrare, con l'ausilio del disegno, che si possono identificare i seguenti punti di Bézier:

$$(0, 27), (0.25, 35), (0.75, 29), (1, 43).$$

- (3) Sistemare il punto di Bézier mancante (ascissa: 0.5) in modo tale che il contorno della parte di carrozzeria che si sta trattando appaia come una curva "piatta" (soluzione:  $(0.5, 34)$ ).
- (4) Determinare il polinomio di Bézier e disegnarne il grafico.
- (5) Apportare delle piccole correzioni al contorno e osservare gli effetti prodotti.

**Esercizio 15.** Il contorno di un dettaglio di carrozzeria sia descritto nell'intervallo  $[0, 8]$  dal polinomio di Bézier

$$P_1(u) = 24u(1-u)^3 + 24u^2(1-u)^2 + 22u^3(1-u) + 6u^4$$

e nell'intervallo  $[9.5, 24.5]$  dal polinomio di Bézier

$$P_2(u) = 5(1-u)^3 + 18.75u(1-u)^2 + 21u^2(1-u) + 7u^3,$$

con  $u \in [0, 1]$ .

- (1) Determinare il grado dei polinomi di Bézier.
- (2) Determinare le coordinate dei punti di Bézier.
- (3) Disegnare i due poligoni di Bézier, nella giusta scala, nell'intervallo  $[0, 24.5]$ .  
Da cosa si poteva dedurre che la pendenza del grafico di  $P_1(u)$  nell'estremo destro dell'intervallo è uguale alla pendenza del grafico di  $P_2(u)$  nell'estremo sinistro dell'intervallo?  
Da cosa si poteva dedurre che il grafico di  $P_2$  possiede una tangente orizzontale nell'estremo destro dell'intervallo?
- (4) Disegnare il contorno del dettaglio di carrozzeria (ossia schizzare i grafici di  $P_1(u)$  e di  $P_2(u)$ ).
- (5) Il “buco” tra i due tratti di curva deve essere “chiuso” per mezzo di un adeguato polinomio di Bézier. Qual è il grado minimo che deve avere questo polinomio affinché la prima derivata sia continua su tutta la curva?  
Mostrare che da questa condizione e dall'ulteriore condizione di un andamento simmetrico, il polinomio

$$P_3(u) = 6(1 - u)^3 + 18.375u(1 - u)^2 + 14.625u^2(1 - u) + 5u^3$$

è la soluzione del problema.

## 7. CURVE DI BÉZIER

Siamo interessati a risolvere il problema seguente (motivazioni possono essere trovate nel campo dell'ingegneria, per esempio automobilistica o aeronautica):

dati i punti  $P_0(x_0, y_0)$  e  $P_1(x_1, y_1)$ , identificati rispettivamente dai vettori  $\vec{r}_0$  e  $\vec{r}_1$ , tracciare una curva “dolce” che esca da  $P_0$  con una pendenza (velocità iniziale) assegnata  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$  ed arrivi in  $P_1$  con una pendenza (velocità finale) assegnata  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ .

Nelle applicazioni di grafica al calcolatore si preferiscono utilizzare delle rappresentazioni parametriche per le curve (e per le superfici), poiché la descrizione implicita mediante un'equazione porta spesso a risolvere dei sistemi di equazioni per ogni singolo punto. Sia quindi  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , il vettore che indica la posizione di un punto sulla curva.

Per risolvere il problema posto parametrizziamo la curva sull'intervallo  $[0, 1]$ , determiniamo cioè le funzioni (polinomiali)  $x(t), y(t)$  tali che:

- $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, x(1) = x_1, x'(1) = x'_1;$
- $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, y(1) = y_1, y'(1) = y'_1.$

Si può notare subito che, in pratica, dobbiamo risolvere due problemi di interpolazione di Hermite:  $x(t)$  e  $y(t)$  saranno allora polinomi di terzo grado.

La curva cercata può essere parametrizzata nel modo seguente:

$$(11) \quad \vec{r}(t) = \vec{a}_0 + t\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + t^3\vec{a}_3, \quad t \in [0, 1]$$

con le condizioni iniziali

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \vec{r}(1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}'(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}'(1) = \vec{v}_1$$

(da notare che:  $\vec{r}'(t) = \vec{a}_1 + 2t\vec{a}_2 + 3t^2\vec{a}_3$ ).

Risolvendo il sistema (la matrice seguente si ricava facilmente dalla formula (10))

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}(0) \\ \vec{r}'(0) \\ \vec{r}(1) \\ \vec{r}'(1) \end{pmatrix}$$

possiamo determinare i valori dei coefficienti:

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \vec{r}(0) \\ \vec{a}_1 &= \vec{r}'(0) \\ \vec{a}_2 &= -3\vec{r}(0) - 2\vec{r}'(0) + 3\vec{r}(1) - \vec{r}'(1) \\ \vec{a}_3 &= 2\vec{r}(0) + \vec{r}'(0) - 2\vec{r}(1) + \vec{r}'(1) \end{aligned}$$

ed esprimere l'equazione parametrica della curva nella forma seguente:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}(0) \\ \vec{r}'(0) \\ \vec{r}(1) \\ \vec{r}'(1) \end{pmatrix}$$

Si può verificare che la soluzione appena ottenuta mediante parametrizzazione corrisponde a quella che si otterrebbe risolvendo i relativi problemi di interpolazione di Hermite.

Il metodo appena descritto venne ideato e utilizzato da Ferguson per la progettazione di aerei: nella progettazione interattiva di parti di curve l'andamento della curva è determinato dalla scelta dei vettori posizione e dei vettori tangenti nei punti  $P_0$  e  $P_1$ .

**Esercizio 16.** Siano  $P_0(2, 3)$  e  $P_1(6, 1)$ . Tracciare una curva "dolce" che esca da  $P_0$  con la pendenza data da  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  ed arrivi in  $P_1$  con la pendenza data da  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Trovare poi la rappresentazione algebrica di tale curva.

Il metodo di Bézier per la progettazione interattiva di parti di curve richiede invece 4 punti  $\vec{r}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), detti *punti di controllo*, e si basa sulla seguente parametrizzazione della curva mediante un polinomio di Bézier di terzo grado:

$$(12) \quad \vec{r}(t) = (1-t)^3\vec{r}_0 + 3t(1-t)^2\vec{r}_1 + 3t^2(1-t)\vec{r}_2 + t^3\vec{r}_3, \quad t \in [0, 1]$$

Confrontando i coefficienti della formula (11) con quelli della formula (12) si ottengono:

$$\begin{aligned}\vec{a}_0 &= \vec{r}_0 \\ \vec{a}_1 &= -3\vec{r}_0 + 3\vec{r}_1 \\ \vec{a}_2 &= 3\vec{r}_0 - 6\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2 \\ \vec{a}_3 &= -\vec{r}_0 + 3\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 + \vec{r}_3\end{aligned}$$

e quindi la parametrizzazione può essere scritta nella seguente forma matriciale:

$$(13) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}$$

La parte di curva, detta *arco di Bézier*, inizia nel punto individuato da  $\vec{r}_0$  e termina nel punto individuato da  $\vec{r}_3$ : spostando interattivamente (con il mouse, con la penna ottica o con strumenti analoghi) i punti individuati da  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  (che non si trovano sulla curva) si possono cambiare le pendenze iniziale e finale della parte di curva: un programma CAD permette poi di leggere le nuove coordinate dei punti di controllo e quindi, mediante la formula (13), si può trovare l'equazione parametrica della curva.

**Esercizio 17.** Sono dati i 4 punti di controllo individuati dai vettori

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Schizzare l'arco di Bézier corrispondente e trovarne poi la parametrizzazione.
- (2) Risolvere nuovamente l'esercizio, sostituendo  $\vec{r}_1$  con  $\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  e notare i cambiamenti che sono intervenuti.

**Esercizio 18.** Generalizzare il metodo di Bézier per la progettazione interattiva di parti di curve al caso in cui si abbiano 5 punti di controllo invece di 4 (determinare cioè una formula analoga alla (13)).

**Esercizio 19.** Sono dati i 5 punti di controllo individuati dai vettori

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Schizzare l'arco di Bézier corrispondente e trovarne poi la parametrizzazione.
- (2) Risolvere nuovamente l'esercizio, ponendo  $\vec{r}_4 = \vec{r}_0$ .