Claudio Marsan

Conduzione del calore

Liceo cantonale di Mendrisio
anno scolastico 2001–2002

Dispense per la parte matematica del corso di *Fisica e applicazioni della matematica* delle classi 3BC, Liceo cantonale di Mendrisio, anno scolastico 2001–2002.

Questo testo è stato scritto dall'autore con LaTeX2ε (ultima modifica: 11 marzo 2003).

Indice

1 Presentazione del problema

Consideriamo una sottile sbarra metallica isolata ed omogenea di lunghezza L che si trova in una stanza a temperatura ambiente (20 °C). Se pensiamo alla sbarra come ad un segmento di lunghezza L possiamo assegnare ad ogni suo punto un'ascissa $x, 0 \leq x \leq L$ (vedi figura 1). Con $u(t, x)$ indichiamo la temperatura (in gradi centigradi) della sbarra al tempo t nel punto x.

Figura 1:

Per stabilire come varia la temperatura $u(t, x)$ sulla sbarra con il passare del tempo possiamo eseguire un esperimento simile al seguente:

> all'inizio dell'esperimento ($t = 0$) mettiamo in contatto l'estremità sinistra della sbarra ($x = 0$) con una soluzione di acqua e ghiaccio e l'estremità destra della sbarra ($x = L$) con vapore d'acqua bollente. Per tutta la durata dell'esperimento ($t \geq 0$) manteniamo le due estremità alle temperature costanti di 0 °C e, rispettivamente, 100 °C.

Possiamo così riassumere le condizioni imposte dall'esperimento:

- $t \geq 0$;
- $x \in [0, L]$;
- *condizioni iniziali*: $u(0, x) = 20$, per $0 < x < L$;
- *condizioni al contorno*: $\begin{cases} u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 100 \end{cases}$, per $t \geq 0$.

Il tempo t e la posizione x sulla sbarra sono variabili continue: non potendo misurare la temperatura in ogni istante di tempo e in ogni punto della sbarra, dobbiamo necessariamente discretizzare le variabili t e x, ossia dobbiamo scegliere ogni quanto tempo registrare la temperatura, quanti termometri utilizzare e dove localizzarli. Operiamo dunque la *discretizzazione* seguente:

- collochiamo quattro termometri sulla sbarra alle distanze $\frac{L}{5}$, $\frac{2L}{5}$, $\frac{3L}{5}$ e $\frac{4L}{5}$ dall'estremo sinistro della sbarra. Per semplicità supporremo che $L = 5$ cm. I termometri saranno quindi collocati nei punti di ascissa $x = 1, 2, 3, 4$ (vedi figura 2).
- ogni h minuti ($h > 0$), ossia agli istanti di tempo $0, h, 2h, 3h, \ldots$ registriamo la temperatura indicata dai quattro termometri.

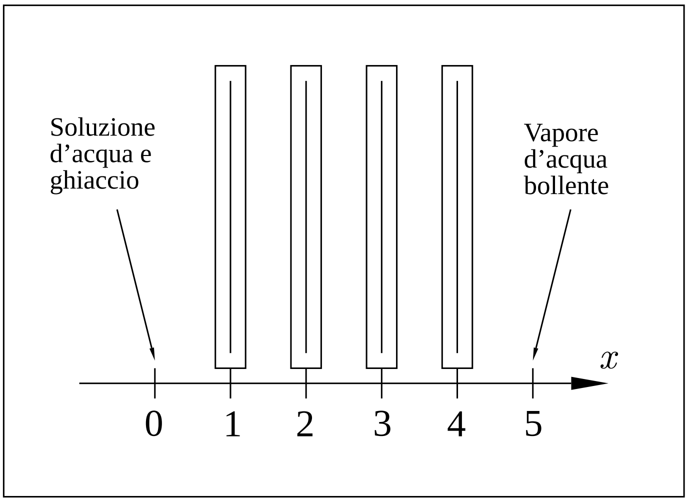

Figura 2:

Il problema originale (ossia: stabilire come varia la temperatura $u(t, x)$ sulla sbarra con il passare del tempo) si riduce, nel modello che stiamo costruendo, alla determinazione dei valori della temperatura $u(t, x)$ per $t = 0, h, 2h, 3h, \ldots$ e per $x = 1, 2, 3, 4$.

2 Lo stato stazionario del sistema

Prima di iniziare lo studio del problema sono necessarie alcune considerazioni di carattere fisico.

- Il calore Q è una forma particolare di energia. L'unità di misura classica per il calore è la *caloria* (cal) che corrisponde alla quantità di calore ΔQ necessaria per alzare da 14.5 °C a 15.5 °C la temperatura di un campione di 1 g di H_2O alla pressione di 760 torr. Nel sistema SI il calore viene misurato in *joule* (J). Vale la formula di conversione: 1 cal = 4.185 J.
- Ci sarà una certa distribuzione della temperatura lungo la sbarra.
- Il calore fluisce dal punto più caldo al punto più freddo.

- Se aspettiamo sufficientemente a lungo non osserveremo più variazioni apprezzabili della temperatura: la sbarra avrà raggiunto un *equilibrio* (o *stato stazionario*) rispetto alla temperatura.

- Con *flusso di calore* tra due punti della sbarra x_1 e x_2 intendiamo la quantità di energia per unità di tempo che fluisce da x_1 a x_2. Tale quantità può essere positiva o negativa.

- Il flusso di calore tra due punti della sbarra x_1 e x_2 è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura misurata nei due punti. Per esempio il flusso di calore dal punto $x = 4$ al punto $x = 3$ della sbarra è dato da

$$k \cdot [u(t, 4) - u(t, 3)],$$

dove $k > 0$ è supposta costante e dipende dal materiale (k è detta *capacità termica*). Tale flusso sarà positivo se il calore va dal punto $x = 4$ al punto $x = 3$, negativo in caso contrario.

- La relazione fra la variazione di calore ΔQ e la variazione di temperatura ΔT è data da

$$\Delta Q = S \cdot \Delta T, \tag{1}$$

dove S, il *calore specifico* del materiale, si suppone costante e indipendente dalla temperatura.

Per calcolare la quantità di calore ΔQ che fluisce, per esempio, nel punto $x = 3$ tra il tempo t e il tempo $t + h$ calcoliamo:

$$\text{calore}_{2\to 3} = k \cdot [u(t, 2) - u(t, 3)] \cdot h$$

e

$$\text{calore}_{4\to 3} = k \cdot [u(t, 4) - u(t, 3)] \cdot h,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \Delta Q &= k \cdot [u(t, 2) - u(t, 3)] \cdot h + k \cdot [u(t, 4) - u(t, 3)] \cdot h = \\ &= k \cdot h \cdot [u(t, 2) - 2 \cdot u(t, 3) + u(t, 4)], \end{aligned}$$

ossia

$$\Delta Q = k \cdot h \cdot [u(t, 2) - 2 \cdot u(t, 3) + u(t, 4)]. \tag{2}$$

Tra gli istanti di tempo t e $t+h$ si registra, nel punto $x = 3$, una variazione di temperatura ΔT, e sfruttando la (1), ottieniamo:

$$\Delta T = u(t + h, 3) - u(t, 3) = \frac{1}{S} \cdot \Delta Q,$$

ossia

$$\Delta Q = S \cdot [u(t+h,3) - u(t,3)]. \tag{3}$$

Confrontando la (2) e la (3) ottieniamo l'equazione

$$\frac{u(t+h,3) - u(t,3)}{h} = \frac{k}{S} \cdot [u(t,2) - 2 \cdot u(t,3) + u(t,4)],$$

che possiamo generalizzare per ogni punto x ($x = 1,2,3,4$), ottenendo così la seguente equazione (detta *equazione alle differenze lineare*, del primo ordine rispetto a t e del secondo ordine rispetto a x):

$$\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} = \frac{k}{S} \cdot [u(t,x-1) - 2 \cdot u(t,x) + u(t,x+1)], \tag{4}$$

per $x = 1,2,3,4$.

Possiamo interpretare il primo membro della (4) come la *velocità (media) di variazione della temperatura* fra gli istanti t e $t+h$ nel punto x. Da notare che il secondo membro della (4) tiene conto solo delle variazioni di temperatura rispetto a x (e non a t).

Sia $C := \frac{h \cdot k}{S}$. Dall'equazione (4) possiamo ricavare l'espressione di $u(t+h,x)$ in funzione dei valori della temperatura registrata al tempo t nei punti $x-1$, x e $x+1$:

$$u(t+h,x) = C \cdot u(t,x-1) + (1-2C) \cdot u(t,x) + C \cdot u(t,x+1), \tag{5}$$

per $x = 1,2,3,4$.

Se conosciamo lo stato della sbarra nell'istante t possiamo utilizzare l'equazione (5) per *predire* la temperatura nell'istante $t+h$ e nel punto x: basta assegnare dei valori a C (oppure a S, h, k).

Esercizio 2.1. Siano $\frac{k}{S} = 0.5$ e $h = 1$. Risolvere l'equazione (5) con le condizioni iniziali

$$u(0,x) = 20 \quad \text{per } x = 1,2,3,4$$

e le condizioni al contorno

$$u(t,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(t,5) = 100, \text{ per } t \geq 0 .$$

Per i calcoli è conveniente utilizzare un calcolatore. Osservare il comportamento delle temperature $u(t,x)$ per valori crescenti di t.

Esercizio 2.2. Siano $\frac{k}{S} = 0.5$ e $h = 1$. Risolvere l'equazione (5) con le condizioni iniziali

$$u(0,1) = 80, \quad u(0,2) = 60, \quad u(0,3) = 40, \quad u(0,4) = 20$$

e le condizioni al contorno

$$u(t,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(t,5) = 100, \text{ per } t \geq 0 .$$

Per i calcoli è conveniente utilizzare un calcolatore. Osservare il comportamento delle temperature $u(t,x)$ per valori crescenti di t e confrontare i risultati con quelli ottenuti nell'esercizio 2.1.

Esercizio 2.3. Calcolare $u(1, x)$ per $x = 1, 2, 3, 4$ considerando le stesse condizioni iniziali e al contorno dell'esercizio 1, ponendo $\frac{k}{S} = 0.5$ e scegliendo successivamente

$$h = 1, \quad h = 0.5, \quad h = 0.1 \; .$$

Esercizio 2.4. Svolgere nuovamente l'esercizio 2.1 con $\frac{k}{S} = 0.56$. Cosa si può osservare di diverso?

Esercizio 2.5. Ripetere gli esercizi 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 utilizzando una sbarra lunga 9 cm e collocando 8 termometri in corrispondenza delle ascisse $x = 1, 2, \ldots, 8$.

Esercizio 2.6. Lo stato del sistema è detto *stazionario* se

$$u(t + h, x) = u(t, x), \qquad \text{per } 0 \leq x \leq 5.$$

Trovare la distribuzione stazionaria della temperatura per le condizioni al contorno

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, 5) = 100, \qquad \text{per } t \geq 0.$$

Dalle esperienze numeriche fatte negli esercizi precedenti possiamo ricavare l'indicazione seguente:

> al crescere del tempo t la distribuzione della temperatura tende verso la soluzione
>
> $$u(t, x) = 20x,$$
>
> con le condizioni al contorno $u(t, 0) = 0$ e $u(t, 5) = 100$ per $t \geq 0$, indipendentemente dalle condizioni iniziali del sistema (ossia dalla storia del passato del sistema).

Si può verificare (vedi esercizio 2.7) che $u(t, x) = 20x$ è una soluzione dell'equazione (5) con le condizioni al contorno $u(t, 0) = 0$ e $u(t, 5) = 100$ per $t \geq 0$: tale soluzione particolare, indipendente dal tempo t, è detta *soluzione stazionaria* (o *soluzione d'equilibrio*) del sistema.

Esercizio 2.7. Verificare che $u(t, x) = 20x$ è una soluzione dell'equazione (5) con le condizioni al contorno $u(t, 0) = 0$ e $u(t, 5) = 100$ per $t \geq 0$. Trovare poi la soluzione stazionaria dell'equazione (5) per le condizioni al contorno

$$u(t, 0) = T_1 \quad \text{e} \quad u(t, 5) = T_2, \qquad \text{per } t \geq 0.$$

3 Deviazioni dalla distribuzione stazionaria

Invece di descrivere lo stato del sistema mediante le temperature $u(t,x)$ risulta più comodo considerare le *deviazioni* $U(t,x)$ delle distribuzioni della temperatura dalla distribuzione stazionaria, ossia:

$$U(t,x) := u(t,x) - 20x.$$

Esercizio 3.1. Mostrare che la funzione $U(t,x)$ verifica l'equazione

$$U(t+h,x) = C \cdot U(t,x-1) + (1-2C) \cdot U(t,x) + C \cdot U(t,x+1)$$

per $x = 1,2,3,4$ e per $t \geq 0$, dopo aver scritto le necessarie condizioni iniziali e condizioni al contorno per $U(t,x)$.

Secondo il nostro modello, lo stato fisico della sbarra in un istante di tempo t è completamente descritto dai valori della temperatura letti dai termometri sistemati nei punti $x = 1,2,3,4$. Da quanto visto nell'esercizio 3.1, lo stato del sistema può anche essere individuato (e così faremo nel seguito) dalle deviazioni della temperatura dalla distribuzione stazionaria. Lo stato del sistema è allora individuato da

$$U_i(t) := U(t,i), \quad i = 1,2,3,4.$$

Per comodità scriveremo U_i invece di $U_i(t)$ ricordandoci comunque della dipendenza dal tempo t.

Lo stato del sistema può essere individuato dal vettore

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

che viene detto *vettore–stato* (naturalmente dovremmo scrivere $\vec{U}(t)$ invece di $\vec{U}$, ma considereremo sottintesa la dipendenza dal tempo t).

Ammettiamo ora che il sistema sia allo stato $\vec{U}$ nell'istante di tempo t, con le condizioni al contorno $U(t,0) = U(t,5) = 0$. Vogliamo determinare $\vec{V} = \vec{U}(t+h)$, il vettore–stato del sistema all'istante $t+h$.

Esercizio 3.2. Verificare che: $\begin{cases} V_1 = (1-2C) \cdot U_1 + C \cdot U_2 \\ V_2 = C \cdot U_1 + (1-2C) \cdot U_2 + C \cdot U_3 \\ V_3 = C \cdot U_2 + (1-2C) \cdot U_3 + C \cdot U_4 \\ V_4 = C \cdot U_3 + (1-2C) \cdot U_4 \end{cases}$

Possiamo quindi vedere l'*evoluzione temporale* (di una quantità h) del sistema come una funzione del tipo

$$T:\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \qquad \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \mapsto T(\vec{U}) = \begin{pmatrix} (1-2C)\cdot U_1 + C\cdot U_2 \\ C\cdot U_1 + (1-2C)\cdot U_2 + C\cdot U_3 \\ C\cdot U_2 + (1-2C)\cdot U_3 + C\cdot U_4 \\ C\cdot U_3 + (1-2C)\cdot U_4 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\vec{U}(t+h) = T(\vec{U})$.

Esercizio 3.3. Verificare che la funzione T è un'applicazione lineare e determinare la matrice $[T]$ dell'applicazione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.4. Calcolare $T(\vec{U})$ per $\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}^t$.

Esercizio 3.5. Sia $C := 0.5$ e sia $\vec{W}$ il vettore–stato al tempo $t + 2h$. Esprimere $\vec{W}$ in funzione di $\vec{U}$. Sia inoltre $M := \max\{|U_1|, |U_2|, |U_3|, |U_4|\}$. Determinare quali possono essere i valori massimi per $|W_1|$ e $|W_2|$. Trovare poi un esempio di vettore–stato $\vec{U}$ che realizzi la stima fatta per $|W_2|$ nel caso sia $M = 1$.

Dall'uguaglianza $\vec{U}(t + h) = T(\vec{U})$ e conoscendo il vettore–stato delle condizioni iniziali $\vec{U}^\circ := \vec{U}(0)$ possiamo ricavare:

$$\begin{array}{lclclclcl} \vec{U}(h) & = & \vec{U}(0+h) & = & T(\vec{U}^\circ) & & & & \\ \vec{U}(2h) & = & \vec{U}(h+h) & = & T(\vec{U}(h)) & = & T(T(\vec{U}^\circ)) & = & T^2(\vec{U}^\circ) \\ \vec{U}(3h) & = & \vec{U}(2h+h) & = & T(\vec{U}(2h)) & = & T(T^2(\vec{U}^\circ)) & = & T^3(\vec{U}^\circ) \\ \ldots & & & & & & & & \end{array}$$

e, in generale:

$$\vec{U}(nh) = T^n(\vec{U}^\circ), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4 Studio dell'evoluzione temporale del sistema per mezzo delle matrici

Lo studio dell'evoluzione temporale del sistema si riduce allo studio delle potenze successive dell'applicazione lineare T o della sua matrice $[T]$. In particolare per mostrare che lo stato della sbarra tende allo stato stazionario dovremo studiare il comportamento di T^n o di $[T]^n$ per $n \to +\infty$.

È molto più comodo lavorare con le matrici poiché possiamo sfruttare del software adeguato per la manipolazione algebrica di matrici.

Esercizio 4.1. Eseguire diversi esperimenti per stabilire il comportamento di $[T]^n$ nei casi $C = 0.5$, $C = 0.25$ e $C = 0.1$ al crescere di n. Come spiegare i risultati ottenuti?

Esercizio 4.2. Eseguire diversi esperimenti per stabilire il comportamento di $[T]^n$ nei casi $C = 0.55$, $C = 0.6$ e $C = 0.65$ al crescere di n. Come si comporta $[T]^n$ al crescere di n? Come spiegare i risultati ottenuti?

Dalle esperienze numeriche degli esercizi precedenti possiamo concludere che:

- Per valori di $C < 0.55$ la soluzione $\vec{U}(nh)$, ossia $[T]^n \cdot \vec{U}^\circ$, tende a $\vec{0}$, da cui ricaviamo che la distribuzione della temperatura tende alla distribuzione stazionaria.
- Per valori di C maggiori di un valore limite compreso tra 0.55 e 0.56 le soluzioni numeriche tendono ad assumere, con il passare del tempo, un andamento oscillatorio ed esplosivo: ciò non è spiegabile a livello fisico. L'*instabilità numerica* del nostro modello è spiegabile con la discretizzazione del tempo: utilizzando un modello continuo basato sulle equazioni differenziali tale instabilità si può eliminare.
- Il calcolo di $[T]^n \cdot \vec{U}^\circ$ è computazionalmente dispendioso e quindi affetto da imprecisioni numeriche.

Nel seguito vogliamo tentare di semplificare il calcolo di $[T]^n \cdot \vec{U}^\circ$. Ricordiamo dapprima che, se indichiamo con $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ i vettori che formano la base canonica di $\mathbb{R}^4$, allora:

- le colonne della matrice $[T]$ sono i vettori $T(\vec{e}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$;
- il vettore $T(\vec{U})$ è una combinazione lineare dei vettori della base canonica.

Possiamo limitarci a studiare l'effetto dell'applicazione lineare T sui vettori della base canonica. Se fosse

$$T(\vec{e}_i) = \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \text{ ossia } [T] \cdot \vec{e}_i = \lambda_i \cdot \vec{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

cioè se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ fossero autovalori di T (e di $[T]$) e $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ i relativi autovettori, allora il calcolo di $[T]^n \cdot \vec{U}^\circ$ sarebbe veramente semplice. L'idea che intendiamo seguire è la seguente: cerchiamo di costruire una base di $\mathbb{R}^4$, composta dai vettori $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$, per la quale valga

$$T(\vec{f}_i) = \lambda_i \cdot \vec{f}_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

e determiniamo in seguito la matrice dell'applicazione lineare T rispetto a questa base (indicheremo tale matrice con $[T]'$).

Esercizio 4.3. Determinare la matrice $[T]'$ dell'applicazione lineare T rispetto alla nuova base (ancora da determinare!) $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e mostrare come si calcola la potenza n–esima di $[T]'$.

Dobbiamo ora determinare gli autovalori λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 di T e i relativi autovettori $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}$. Sia

$$\vec{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \end{pmatrix}^t$$

un simile autovettore relativo all'autovalore λ. L'equazione

$$T(\vec{\nu}) = \lambda \cdot \vec{\nu}$$

fornisce allora il seguente sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} (1-2C) \cdot \nu_1 + C \cdot \nu_2 = \lambda \cdot \nu_1 \\ C \cdot \nu_1 + (1-2C) \cdot \nu_2 + C \cdot \nu_3 = \lambda \cdot \nu_2 \\ C \cdot \nu_2 + (1-2C) \cdot \nu_3 + C \cdot \nu_4 = \lambda \cdot \nu_3 \\ C \cdot \nu_3 + (1-2C) \cdot \nu_4 = \lambda \cdot \nu_4 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \nu_2 = \frac{\lambda+2C-1}{C} \cdot \nu_1 \\ \nu_1 + \nu_3 = \frac{\lambda+2C-1}{C} \cdot \nu_2 \\ \nu_2 + \nu_4 = \frac{\lambda+2C-1}{C} \cdot \nu_3 \\ \nu_3 = \frac{\lambda+2C-1}{C} \cdot \nu_4 \end{cases}$$

e, ponendo

$$\mu := \frac{\lambda + 2C - 1}{C},$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \nu_2 = \mu \cdot \nu_1 \\ \nu_1 + \nu_3 = \mu \cdot \nu_2 \\ \nu_2 + \nu_4 = \mu \cdot \nu_3 \\ \nu_3 = \mu \cdot \nu_4 \end{cases} \tag{6}$$

da cui

$$\begin{cases} \mu \cdot \nu_1 - \nu_2 = 0 \\ -\nu_1 + \mu \cdot \nu_2 - \nu_3 = 0 \\ -\nu_2 + \mu \cdot \nu_3 - \nu_4 = 0 \\ -\nu_3 + \mu \cdot \nu_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice del sistema appena scritto è

$$A := \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \mu \end{pmatrix}$$

(nota: è una *matrice tridiagonale*). È ora facile vedere che la condizione $\det(A) = 0$, necessaria affinché il sistema di equazioni sopra abbia una soluzione non triviale, fornisce l'equazione di quarto grado

$$\mu^4 - 3 \cdot \mu^2 + 1 = 0$$

che, grazie alla sostituzione di variabili $\xi = \mu^2$ e a qualche manipolazione algebrica di radicali, ci permette di ottenere le quattro soluzioni

$$\mu_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \mu_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

Ricordandoci che $\mu = \dfrac{\lambda + 2C - 1}{C}$ si ottengono gli autovalori di T:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{2+(\sqrt{5}-3)\cdot C}{2}, & \lambda_2 &= \tfrac{2-(\sqrt{5}+3)\cdot C}{2}, \\ \lambda_3 &= \tfrac{2+(\sqrt{5}-5)\cdot C}{2}, & \lambda_4 &= \tfrac{2-(\sqrt{5}+5)\cdot C}{2} \ . \end{aligned}$$

Se $\det(A) = 0$ allora le righe (e le colonne) di A sono linearmente dipendenti, da cui segue che il rango di A è minore di 4. Conseguentemente il sistema (6) possiede almeno una variabile libera. Per determinare gli autovettori di T possiamo per esempio porre $\nu_1 := 1$ nel sistema (6) e determinare le altre 3 componenti di $\vec{\nu}$ (naturalmente ciò va fatto per λ_1, λ_2, λ_3, λ_4).

Esercizio 4.4. Ricavare gli autovettori di T dal sistema (6), senza passare attraverso il calcolo del determinante della matrice A.

Esercizio 4.5. Verificare che gli autovettori di T relativi agli autovalori λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono dati dai vettori

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ {\mu_1}^2 - 1 \\ {\mu_1}^3 - 2 \cdot \mu_1 \end{pmatrix}, \ \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \\ {\mu_2}^2 - 1 \\ {\mu_2}^3 - 2 \cdot \mu_2 \end{pmatrix}, \ \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_3 \\ {\mu_3}^2 - 1 \\ {\mu_3}^3 - 2 \cdot \mu_3 \end{pmatrix}, \ \vec{f_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_4 \\ {\mu_4}^2 - 1 \\ {\mu_4}^3 - 2 \cdot \mu_4 \end{pmatrix}.$$

Se riuscissimo a dimostrare che i vettori dell'esercizio 4.5 sono linearmente indipendenti, allora essi formerebbero una base di $\mathbb{R}^4$ (n vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione n formano sempre una base, come visto nelle lezioni di matematica). La verifica dell'indipendenza lineare dei vettori dell'esercizio 4.5 è piuttosto laboriosa. La teoria ci viene però in aiuto, poiché un teorema dell'algebra lineare garantisce che, se gli autovalori di una matrice sono tutti reali, non nulli e distinti, allora i relativi autovettori sono linearmente indipendenti.

Siamo dunque riusciti a determinare una base di $\mathbb{R}^4$ per la quale la matrice dell'applicazione lineare T è diagonale, ossia della forma seguente:

$$[T]' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \ .$$

Come già visto in precedenza (confronta l'esercizio 4.3), l'n-esima potenza di $[T]'$ si può calcolare facilmente:

$$([T]')^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_4}^n \end{pmatrix} .$$

A questo punto risulta chiaro che $([T]')^n \to 0$ per $n \to +\infty$ soltanto se gli autovalori trovati sono minori di 1 in valore assoluto, ossia se

$$\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|\} < 1 . \tag{7}$$

Esercizio 4.6. Verificare che il valore massimo permesso per C affinché la condizione (7) sia soddisfatta è dato da

$$C = \frac{4}{5+\sqrt{5}} \cong 0.552786 .$$

Esaminiamo ora la condizione appena trovata per C, ricordando che $C = \frac{h \cdot k}{S}$, dove h è l'ampiezza di ogni singolo intervallo di tempo scelto per la discretizzazione, k e S sono costanti positive che dipendono dal materiale della sbarra.

La condizione $C < \frac{4}{5+\sqrt{5}}$ può essere riscritta nel modo seguente:

$$h < \frac{4}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{S}{k} .$$

Questo significa che l'ampiezza di ogni singolo intervallo di tempo scelto per la discretizzazione non può essere troppo grossolana: la limitazione è tanto più severa quanto minore è la capacità termica k e quanto maggiore è il calore specifico del materiale S.

Conclusione. Abbiamo determinato qual è il punto critico dell'algoritmo numerico presente nel nostro modello. Mediante alcuni accorgimenti (che però non vogliamo trattare, ma che comunque non fanno intervenire ulteriori ipotesi di tipo fisico) si può ottenere un algoritmo numerico *incondizionatamente stabile*, per il quale la disequazione (7) è valida per ogni valore di C.