L'auto e le capre

1. Il problema.

Ad un certo punto di uno spettacolo televisivo americano di successo il *presentatore* invita uno spettatore, scelto tra il pubblico presente in sala, a partecipare ad un gioco. Chiameremo *ospite* questo spettatore.
Il presentatore mostra all'ospite tre porte di garage uguali e chiuse: due di queste nascondono una capra, la terza un'automobile. L'ospite è invitato a scegliere una porta e vincerà ciò che essa nasconde. Il presentatore, che sa dove è nascosta l'automobile, apre una porta diversa da quella scelta dall'ospite, mostrando una capra; invita poi l'ospite a modificare la scelta fatta in precedenza (scelta che chiameremo *scelta iniziale*).

(1) Ammettiamo che l'ospite scelga la porta #1 e che il presentatore apra la porta #3. È conveniente per l'ospite cambiare la scelta iniziale decidendo di aprire la porta #2?

2. Una soluzione "grossolana" del problema.

Leggendo il problema si sarebbe tentati di risolverlo rapidamente e superficialmente, ossia senza la necessaria approfondita riflessione, nel modo seguente:

> il presentatore ha aperto una porta che nascondeva una capra; restano due porte: una che nasconde l'automobile, l'altra che nasconde la capra. La probabilità che l'ospite vinca l'automobile è dunque passata da 1/3 a 1/2, poiché la probabilità che l'automobile si nasconda dietro la porta #1 e la probabilità che l'automobile si nasconda dietro la porta #3 sono uguali.

Secondo questo ragionamento non vi sarebbe, per l'ospite, nessun vantaggio (ma neanche nessun svantaggio) a cambiare la scelta iniziale. Nel seguito mostreremo che questa soluzione è errata.

3. La soluzione di Marilyn.

In *Parade*, il supplemento del giornale americano *Sunday*, appare regolarmente una rubrica intitolata *Ask Marilyn*. La titolare di questa rubrica è una donna che si fa chiamare Marilyn vos Savant e che è citata nel *Guinness dei primati* come la donna con il più alto QI mai registrato. In una risposta ad una lettera di un lettore che le chiedeva la soluzione del problema **(1)**, Marilyn affermò che per l'ospite è conveniente cambiare la scelta iniziale perché, così facendo, la sua probabilità di vincere l'automobile passa da 1/3 a 2/3. Marilyn argomentava la sua risposta nel modo seguente:

- Se l'auto è nascosta dietro la porta #1 (ciò accade con probabilità 1/3) l'ospite perde se modifica la scelta iniziale.

- Se l'auto è nascosta dietro la porta #2 (in questo caso il presentatore è obbligato ad aprire la porta #3) o dietro la porta #3 (in questo caso il presentatore è obbligato ad aprire la porta #2) la probabilità che l'ospite vinca cambiando la scelta iniziale è 2/3: a seconda della porta aperta dal presentatore l'ospite può cambiare la scelta iniziale e vincere.

La soluzione proposta da Marilyn è elegante ma non risolve il problema **(1)**, nel quale il presentatore ha aperto la porta #3. La soluzione di Marilyn considera invece la possibilità che l'auto sia dietro la porta #3: ne segue che il presentatore non può aver già aperto la porta #3 (e quindi nemmeno aver mostrato all'ospite una capra). Nel problema risolto da Marilyn l'ospite dovrebbe annunciare l'intenzione o meno di cambiare la scelta iniziale prima che il presentatore apra una porta.

4. La soluzione del problema (1).

Il problema **(1)** è più complicato e lo possiamo riformulare come problema di probabilità condizionata:

> Qual è la probabilità che l'ospite (che ha scelto la porta #1) vinca l'automobile, dato che il presentatore ha aperto la porta #3?

Nella risoluzione del problema **(1)** è essenziale distinguere i due casi seguenti:

(1a) l'automobile è dietro la porta #2 $\Rightarrow$ il presentatore è obbligato ad aprire la porta #3;
(1b) l'automobile è dietro la porta #1 $\Rightarrow$ il presentatore può aprire la porta #2 o la porta #3.

La risposta al problema **(1)** dipende dalla strategia adottata dal presentatore nel caso **(1b)**, ossia dalla probabilità q con la quale il presentatore apre la porta #3 nel caso **(1b)**.

Introduciamo le variabili aleatorie

C = "numero della porta che nasconde l'automobile"

e

H = " numero della porta aperta dal presentatore".

$p(C=i)$ è la *probabilità a priori* che l'auto si trovi dietro la porta #i (a priori è riferito allo stato delle conoscenze dell'ospite prima che una qualsiasi porta venga aperta), $i=1,2,3$. La variabile aleatoria C è equidistribuita, ossia $p(C=i)=\frac{1}{3}$, $i=1,2,3$.

Gli eventi $(C=i)$, $i=1,2,3$, sono le *cause* che producono gli *effetti*, ossia gli eventi $(H=j)$, $j=1,2,3$.

Le probabilità degli effetti date le cause sono dette *probabilità produttive*: esse sono le probabilità condizionate $p(H=j|C=i)$, $i=1,2,3,\ j=1,2,3$. La probabilità $q=p(H=3|C=1)$ introdotta sopra è una probabilità produttiva.
$p(H=j)$ è la *probabilità a priori* che il presentatore apra la porta #*j* (a priori è riferito al fatto che non si sa dov'è nascosta l'auto), $j=1,2,3$.

Quello che vogliamo conoscere sono le probabilità delle cause dati gli effetti, ossia le *probabilità a posteriori*: esse sono le probabilità condizionate $p(C=i|H=j)$, $i=1,2,3,\ j=1,2,3$. La probabilità che l'ospite vinca l'automobile cambiando la propria scelta iniziale è la probabilità a posteriori $P:=p(C=2|H=3)$.

La *formula di Bayes* permette di esprimere la probabilità a posteriori *P* in funzione delle probabilità produttive $p(H=3|C=i)$, $i=1,2,3$. Ricordandosi che l'ospite ha scelto la porta #1, si ottiene infatti:

$$P=\frac{p(C=2)\cdot p(H=3|C=2)}{p(C=1)\cdot p(H=3|C=1)+p(C=2)\cdot p(H=3|C=2)+p(C=3)\cdot p(H=3|C=3)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot q+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0}$$

da cui segue $P=\dfrac{1}{1+q}$.

Vediamo ora alcuni casi particolari di strategia adottabile da parte del presentatore nel caso **(1b)**.

- *Se l'automobile è dietro la porta #1 il presentatore apre la porta #3 con probabilità* $q=0$.
  Avremo allora:
  $$P=\frac{1}{1+0}=1\ ,$$
  ossia: l'ospite sarà sicuro di vincere l'automobile cambiando la sua scelta iniziale (infatti se il presentatore ha aperto la porta #3 significa che l'auto è nascosta dietro la porta #2).

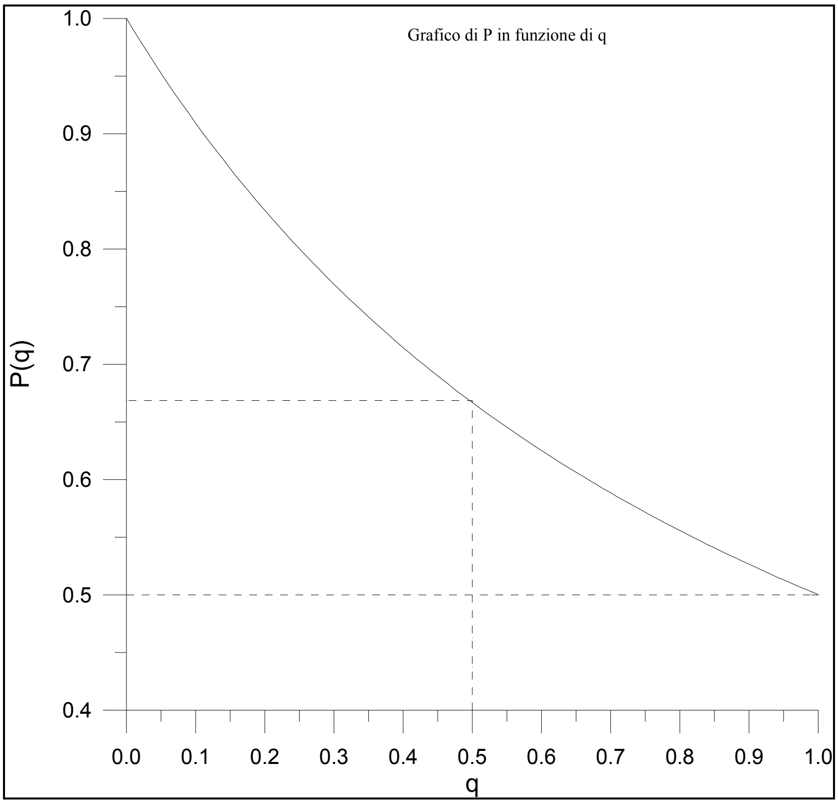
- *Se l'automobile è dietro la porta #1 il presentatore apre la porta #3 con probabilità* $q=1$.
  Avremo allora:
  $$P=\frac{1}{1+1}=0{,}5\ ,$$
  ossia: l'ospite vincerà l'automobile con una probabilità del 50% cambiando la sua scelta iniziale.

- *Se l'automobile è dietro la porta #1 il presentatore apre la porta #3 casualmente con probabilità* $q=0{,}5$.
  Avremo allora:
  $$P=\frac{1}{1+0{,}5}=2/3\approx 0{,}6667,$$
  ossia: l'ospite vincerà l'automobile con una probabilità del 66,67% cambiando la sua scelta iniziale (nota: questo è il probema risolto da Marilyn).

La soluzione del problema **(1)** è dunque la seguente:

> all'ospite conviene cambiare la scelta iniziale poiché, così facendo, la probabilità di vincere l'automobile è P, con $0,5 \leq P \leq 1$.

Di seguito è riportato il grafico della probabilità P che l'ospite, avendo scelto la porta #1, vinca l'automobile, dato che il presentatore abbia aperto la porta #3 con probabilità q.



5. Un altro problema.

Il presentatore mostra all'ospite tre porte di garage uguali e chiuse: due di queste nascondono una capra, la terza un'automobile. Il presentatore, che sa dove è nascosta l'automobile, apre una porta che nasconde una capra e invita l'ospite ad aprire una delle due porte rimaste chiuse, dicendogli che vincerà ciò che essa nasconde. Con quale probabilità l'ospite vincerà l'automobile?

6. Ancora un problema.

Il presentatore mostra all'ospite cinque porte di garage uguali e chiuse: quattro di queste nascondono una capra, la quinta un'automobile. L'ospite è invitato a scegliere una porta e vincerà ciò che essa nasconde. Il presentatore, che sa dove è nascosta l'automobile, apre tre porte diverse da quella scelta dall'ospite, mostrando tre capre; invita poi l'ospite a modificare la scelta fatta in precedenza. È conveniente per l'ospite modificare la scelta iniziale?