Quaternioni

Autore: Claudio Marsan
Ultima revisione: 16 marzo 2003
Versione: Maple V Release 6.02 for Windows 2000

```
> restart:
```

In questo foglio di lavoro vogliamo testare le procedure del package "quaternioni.mpl6".

```
> read(`i:/Maple_6/Quaternioni/quaternioni.mpl6`);
> with(quaternion):
```

I quaternioni speciali:

```
> q1; qi; qj; qk;
```

$$1$$
$$i$$
$$j$$
$$k$$

La tabella di composizione dei quaternioni speciali:

```
> `1*1` = qmul(q1, q1);
```

$$1*1 = 1$$

```
> `1*i` = qmul(q1, qi);
```

$$1*i = i$$

```
> `1*j` = qmul(q1, qj);
```

$$1*j = j$$

```
> `1*k` = qmul(q1, qk);
```

$$1*k = k$$

```
> `i*1` = qmul(qi, q1);
```

$$i*1 = i$$

```
> `i*i` = qmul(qi, qi);
```

$$i*i = -1$$

```
> `i*j` = qmul(qi, qj);
```

$$i*j = k$$

```
> `i*k` = qmul(qi, qk);
```

$$i*k = -j$$

```
> `j*1` = qmul(qj, q1);
```

$$j*1 = j$$

```
> `j*i` = qmul(qj, qi);
```

$$j*i = -k$$

```
> `j*j` = qmul(qj, qj);
```

$$j*j = -1$$

```
> `j*k` = qmul(qj, qk);
```

$$j*k = i$$

```
> `k*1` = qmul(qk, q1);
```

$$k*1 = k$$

```
> `k*i` = qmul(qk, qi);
```

$$k*i = j$$

```
> `k*j` = qmul(qk, qj);
```

$$k*j = -i$$

```
> `k*k` = qmul(qk, qk);
```

$$k*k = -1$$

Definiamo due quaternioni qualsiasi e tre quaternioni particolari:

```
> A := quat(a[0], a[1], a[2], a[3]);
```

$$A := a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k$$

```
> B := quat(b[0], b[1], b[2], b[3]);
```

$$B := b_0 + b_1\, i + b_2\, j + b_3\, k$$

```
> w := quat(-3, 0, 1, 5);
```

$$w := -3 + j + 5\, k$$

```
> x := quat(2, 1, 3, -4);
```

$$x := 2 + i + 3\, j - 4\, k$$

```
> y := quat(7, 0, -1, 1);
```

$$y := 7 - j + k$$

La somma di A e B:

```
> qadd(A, B);
```

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, i + (a_2 + b_2)\, j + (a_3 + b_3)\, k$$

La somma di w, x, z:

```
> qadd(w, x, y);
```

$$6 + i + 3\, j + 2\, k$$

Il prodotto di A e B:

```
> qmul(A, B);
```

$$a_0\, b_0 - a_1\, b_1 - a_2\, b_2 - a_3\, b_3 + (a_0\, b_1 + a_1\, b_0 + a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, i + (a_0\, b_2 - a_1\, b_3 + a_2\, b_0 + a_3\, b_1)\, j + (a_0\, b_3 + a_1\, b_2 - a_2\, b_1 + a_3\, b_0)\, k$$

Il prodotto di w, x, y:

```
> qmul(w, x, y);
```

$$54 - 135\, i - 3\, j + 180\, k$$

Il prodotto di quaternioni non è commutativo. Verifichiamolo in un caso particolare:

```
> `x * y` = qmul(x, y);
```

$$x * y = 21 + 6\, i + 18\, j - 27\, k$$

```
> `y * x`= qmul(y, x);
```

$$y * x = 21 + 8\,i + 20\,j - 25\,k$$

Il coniugato di A:

```
> qconj(A);
```

$$a_0 - a_1\,i - a_2\,j - a_3\,k$$

La norma di A:

```
> qnorm(A);
```

$$a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}$$

La norma di A è uguale al prodotto di A con il suo coniugato:

```
> qmul(A, qconj(A));
```

$$a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}$$

Il coniugato di A+B è la somma dei coniugati di A e B:

```
> qconj(qadd(A, B));
```

$$a_0 + b_0 + (-a_1 - b_1)\,i + (-a_2 - b_2)\,j + (-a_3 - b_3)\,k$$

```
> qadd(qconj(A), qconj(B));
```

$$a_0 + b_0 + (-a_1 - b_1)\,i + (-a_2 - b_2)\,j + (-a_3 - b_3)\,k$$

```
> `Differenza` = %% - %;
>
```

$$\mathit{Differenza} = 0$$

Il coniugato di A*B è il prodotto dei coniugati di B e A:

```
> qconj(qmul(A, B));
```

$$a_0\,b_0 - a_1\,b_1 - a_2\,b_2 - a_3\,b_3 + (-a_0\,b_1 - a_1\,b_0 - a_2\,b_3 + a_3\,b_2)\,i + (-a_0\,b_2 + a_1\,b_3 - a_2\,b_0 - a_3\,b_1)\,j + (-a_0\,b_3 - a_1\,b_2 + a_2\,b_1 - a_3\,b_0)\,k$$

```
> qmul(qconj(B), qconj(A));
```

$$a_0\,b_0 - a_1\,b_1 - a_2\,b_2 - a_3\,b_3 + (-a_0\,b_1 - a_1\,b_0 - a_2\,b_3 + a_3\,b_2)\,i + (-a_0\,b_2 + a_1\,b_3 - a_2\,b_0 - a_3\,b_1)\,j + (-a_0\,b_3 - a_1\,b_2 + a_2\,b_1 - a_3\,b_0)\,k$$

```
> `Differenza` = %% - %;
```

$$\mathit{Differenza} = 0$$

L'inversa moltiplicativa di A è uguale al reciproco della norma di A per il coniugato di A:

```
> qinv(A);
```

$$\frac{a_0}{a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} - \frac{a_1\,i}{a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} - \frac{a_2\,j}{a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} - \frac{a_3\,k}{a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$$

```
> qscal(1/qnorm(A), qconj(A));
```

$$\frac{a_0}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_1\, i}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_2\, j}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_3\, k}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

```
> `Differenza` = %% - %;
```

$$Differenza = 0$$

L'inversa moltiplicativa di x:

```
> qinv(x);
```

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{30} i - \frac{1}{10} j + \frac{2}{15} k$$