Successioni

Note

Autore

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio (Switzerland)
e-mail: claudio.marsan@liceomendrisio.ch

Versione

Versione 2.0, 17 marzo 2003
Maple V Release 6.02 for Windows 2000

Successioni di numeri reali

```
> restart:
```

Le successioni sono funzioni e quindi possiamo usare la sintassi standard di Maple per la loro definizione. Definiamo, per esempio, la successione geometrica di ragione 1/2..

```
> H := n -> (1/2)^n;
```

$$H := n \to \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Calcoliamo alcuni termini della successione H:

```
> H(1), H(2), H(10), H(12);
```

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{4096}$$

Calcoliamo i primi 10 termini della successione H:

```
> for i from 1 to 10 do lprint(H(i)); od;
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/64
1/128
1/256
1/512
1/1024
```

Con il comando **seq(a(n), n= i..j);** si può generare una successione di termini a(i), a(i+1), ..., a(j). Possiamo dunque ottenere i primi 20 termini della successione H anche così:

```
> h := seq((1/2)^n, n=1..20);
```

$$h := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{2048}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{8192}, \frac{1}{16384}, \frac{1}{32768}, \frac{1}{65536}, \frac{1}{131072},$$
$$\frac{1}{262144}, \frac{1}{524288}, \frac{1}{1048576}$$

Per accedere ai termini della successione h bisogna usare la sintassi seguente:

```
> h[1], h[4], h[13], h[17];
```

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8192}, \frac{1}{131072}$$

Al posto di **seq** si può usare anche l'operatore **$**:

```
> k := $((1/2)^n, n=5..25);
```

$$k := \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{2048}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{8192}, \frac{1}{16384}, \frac{1}{32768}, \frac{1}{65536}, \frac{1}{131072}, \frac{1}{262144}, \frac{1}{524288}, \frac{1}{1048576}, \frac{1}{2097152}, \frac{1}{4194304}, \frac{1}{8388608}, \frac{1}{16777216}, \frac{1}{33554432}$$

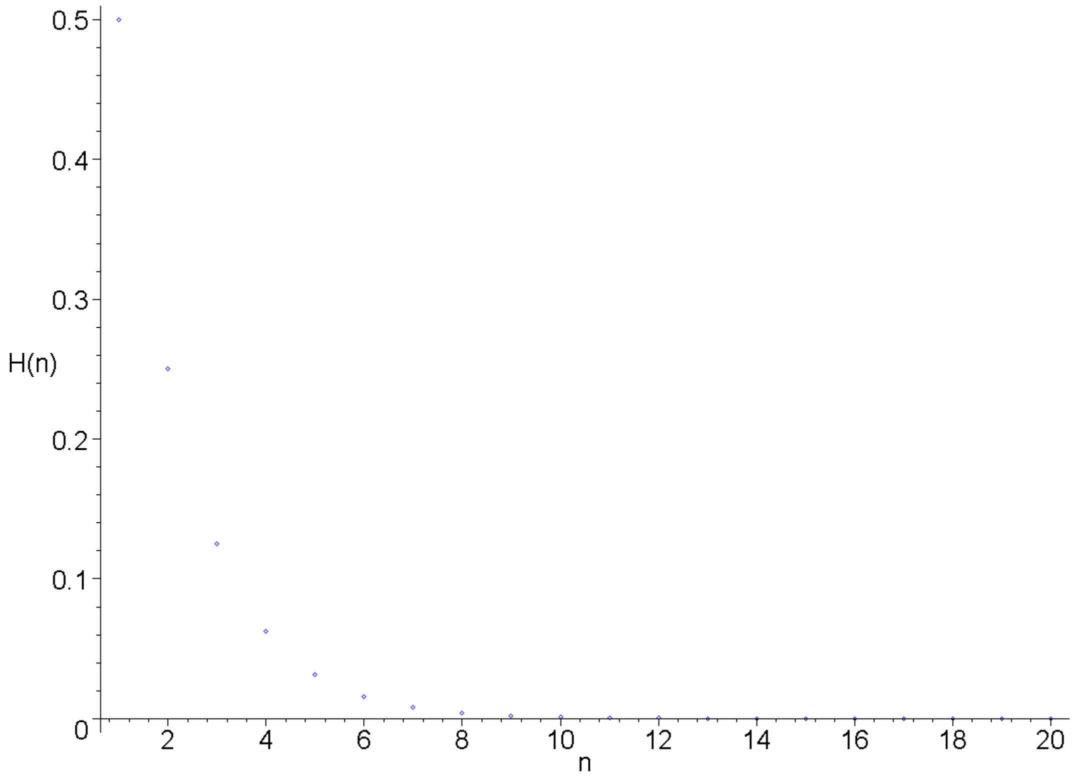
Per studiare la convergenza di una successione si usa il comando **`limit`**, che ha anche la forma inerte **`Limit`**:

```
> Limit(H(n), n=infinity) = limit(H(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Per visualizzare una successione graficamente bisogna dapprima costruire una successione di punti, dove un punto è una lista composta da due elementi e poi richiamare la funzione **`plot`**, con appropriate opzioni (da notare che per rappresentare graficamente dei punti non è necessario dare l'ampiezza dell'intervallo sull'asse delle ascisse). Per esempio:

```
> punti := seq([n, H(n)], n=1..20):
> plot({punti}, style=point, symbol=diamond, color=blue,
  labels=[`n`, `H(n)`]);
```



Si possono estrarre anche delle sottosuccessioni da una successione. Estraiamo, per esempio, i termini di indice pari dalla successione armonica:

```
> H2 := unapply(H(2*'n'), 'n');
```

$$H2 := n \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{(2\,n)}$$

```
> seq(H2(n), n=1..10);
```

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{16384}, \frac{1}{65536}, \frac{1}{262144}, \frac{1}{1048576}$$

Da notare gli apostrofi che delimitano la variabile n sono necessari affinché la variabile n non venga valutata. Alternativamente si sarebbe potuto assegnare ad n il suo nome tramite **`n := 'n';`** e quindi dare il comando **`H2 := unapply(H(2*n), n);`** .

Successione armonica

```
> restart:
> a := n -> 1/n;
```

$$a := n \rightarrow \frac{1}{n}$$

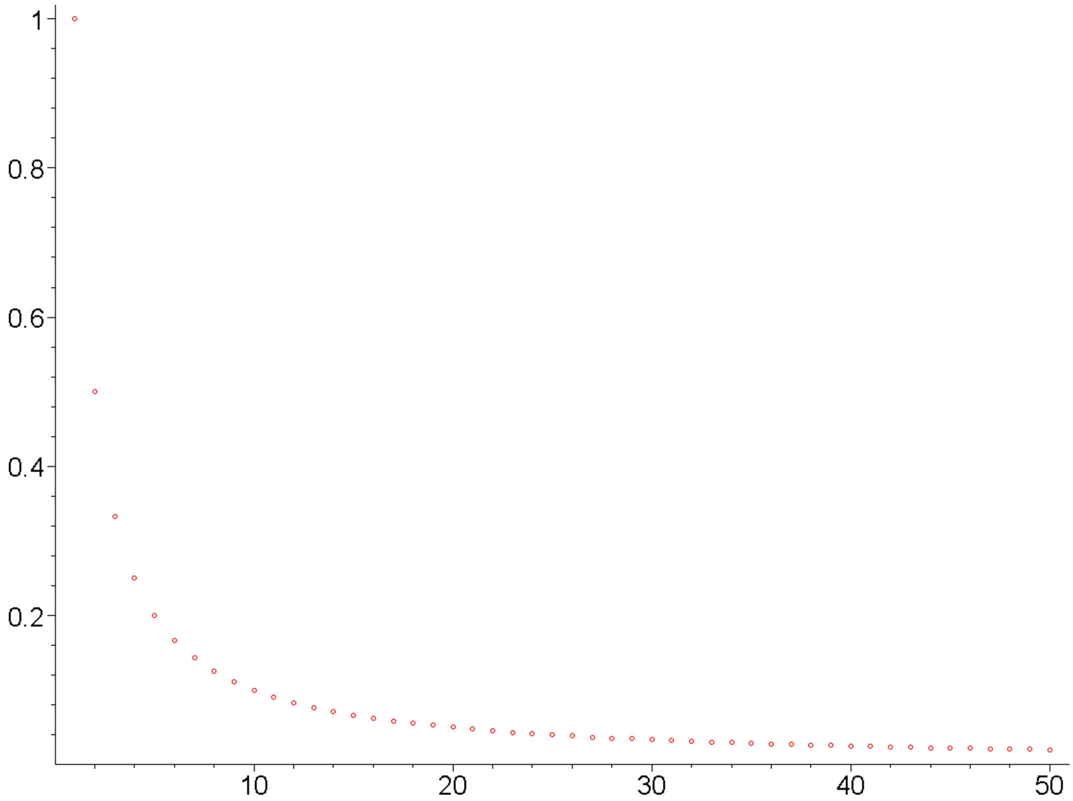
```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$$

```
> Limit(a(n), n=infinity) = limit(a(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```



Verifica di un limite

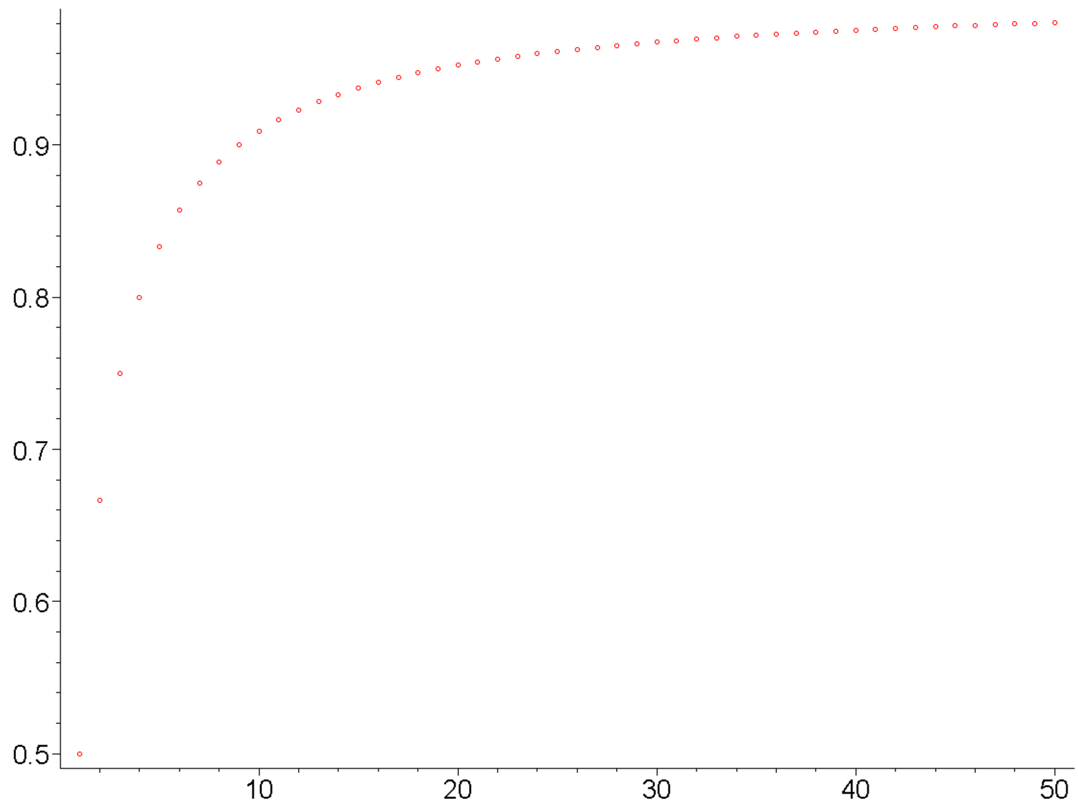
```
> restart:
> a := n -> n/(n + 1);
```

$$a := n \to \frac{n}{n+1}$$

```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}$$

```
> # Ipotesi: a(n) converge verso 1
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```




```
> assume(n > 0); # Comunichiamo a Maple che n è positivo
> # Sia epsilon>0 prefissato. Dobbiamo determinare M>0 tale che
  per ogni n>M valga abs(a(n) - 1) < epsilon.
> abs(a(n) - 1) < epsilon;
```

$$1-\frac{n\sim}{n\sim+1}<\varepsilon$$

```
> normal(%);
```

$$\frac{1}{n\sim+1}<\varepsilon$$

```
> solve(%, n); # non funziona!
> isolate(%, n+1);
```

$$-n\sim-1<-\frac{1}{\varepsilon}$$

```
> isolate(%, n);
```

$$-n\sim<-\frac{1}{\varepsilon}+1$$

```
> % * (-1);
```

$$\frac{1}{\varepsilon}-1<n\sim$$

```
> M := normal(lhs(%));
```

$$M:=-\frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

```
> epsilon := 0.0001;
```

$$\varepsilon:=.0001$$

```
> M;
```

$$9999.000000$$

```
> # Per n > 9999 deve valere abs(a(n) - 1) < 0.0001. Proviamo con
  n=10000.
> abs(a(10000) - 1) < epsilon;
```

$$\frac{1}{10001} < .0001$$

```
> is(%);
```

$$\mathit{true}$$

Una successione alternata

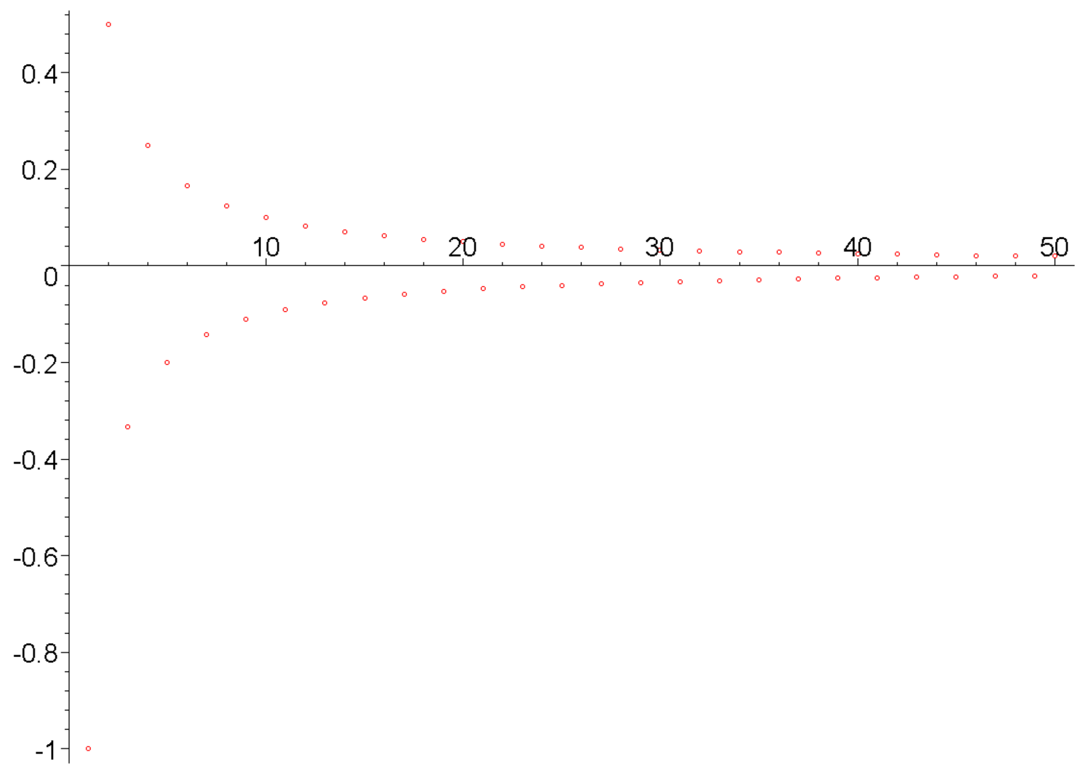
```
> restart:
> a := n -> (-1)^n/n;
```

$$a := n \rightarrow \frac{(-1)^n}{n}$$

```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{10}$$

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```




```
> Limit(a(n), n=infinity) = limit(a(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Una successione divergente

```
> restart:
> a := n -> (n^3 + 3)/(20*n + 1);
```

$$a := n \to \frac{n^3 + 3}{20\,n + 1}$$

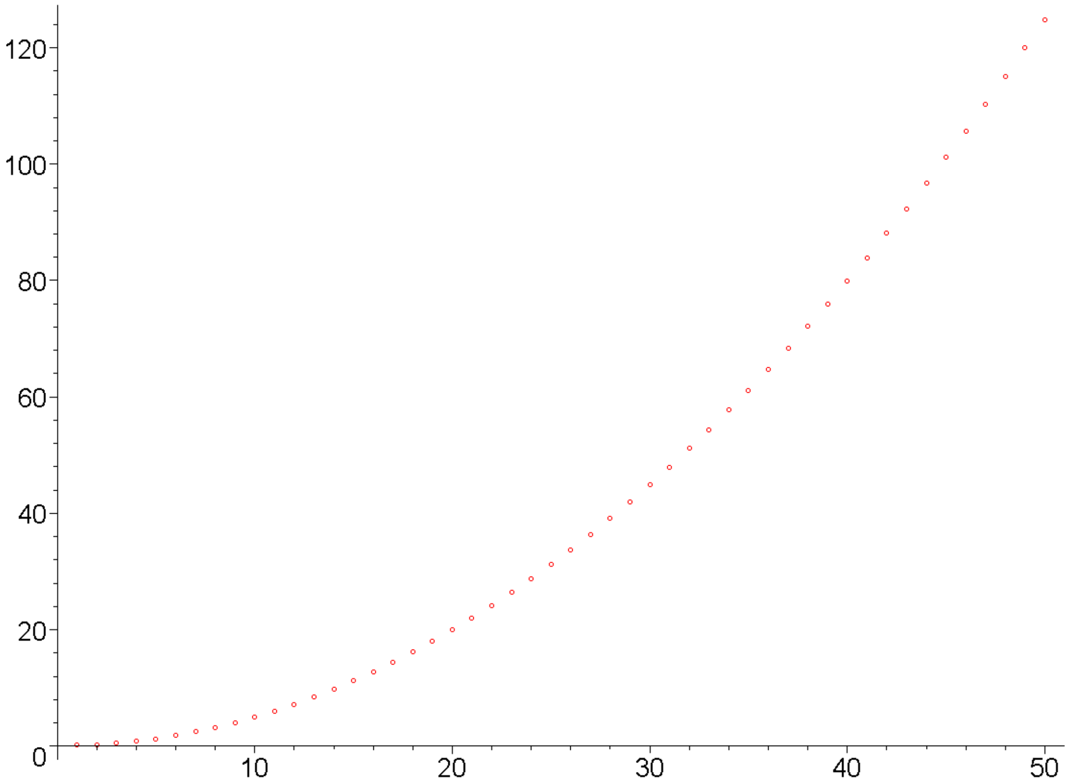
```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$\frac{4}{21}, \frac{11}{41}, \frac{30}{61}, \frac{67}{81}, \frac{128}{101}, \frac{219}{121}, \frac{346}{141}, \frac{515}{161}, \frac{732}{181}, \frac{1003}{201}$$

```
> evalf(%);
```

.1904761905, .2682926829, .4918032787, .8271604938, 1.267326733, 1.809917355, 2.453900709, 3.198757764, 4.044198895, 4.990049751

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```




```
> Limit(a(n), n=infinity) = limit(a(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 3}{20\,n + 1} = \infty$$

Una successione con due punti di accumulazione

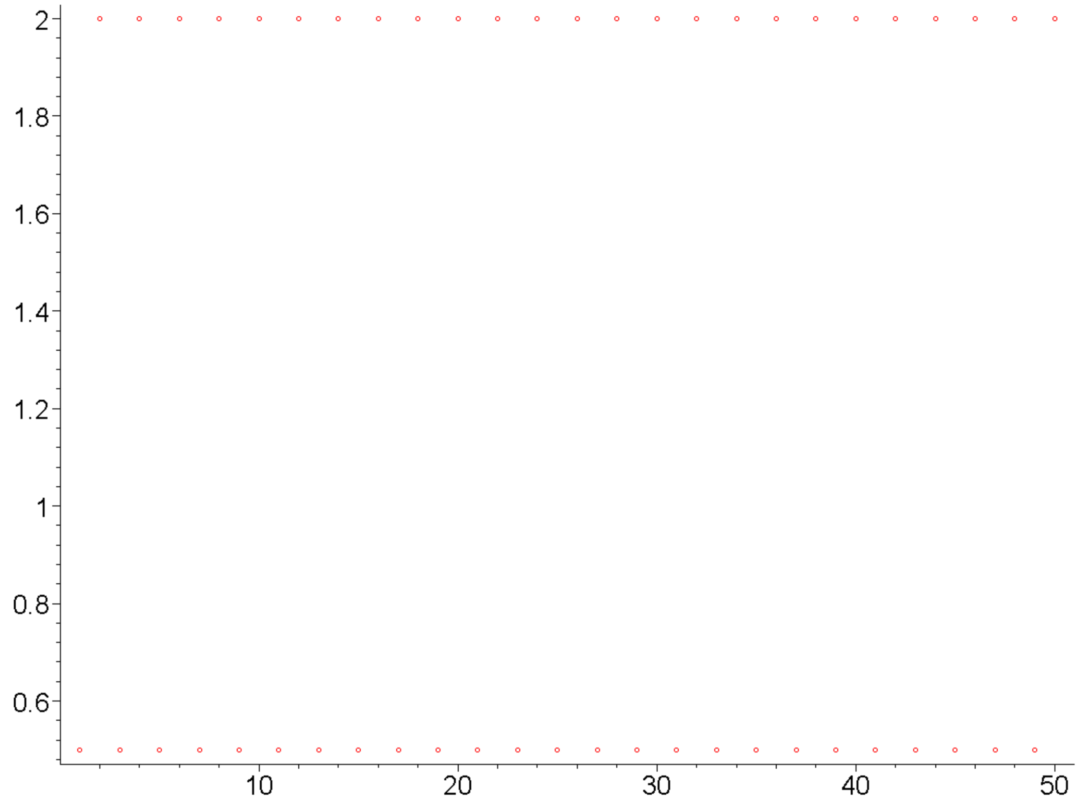
```
> restart:
> a := n -> 2^((-1)^n);
```

$$a := n \to 2^{((-1)^n)}$$

```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$$

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```




```
> Limit(a(n), n=infinity) = limit(a(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} 2^{((-1)^n)} = \frac{1}{2} .. 2$$

```
> #Interpretazione: Maple riconosce che la funzione è limitata
  nell'intervallo [1/2,2]
```

Un'altra successione con due punti di accumulazione

```
> restart:
> a := n -> (-1)^n * n/(n + 1);
```

$$a := n \rightarrow \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

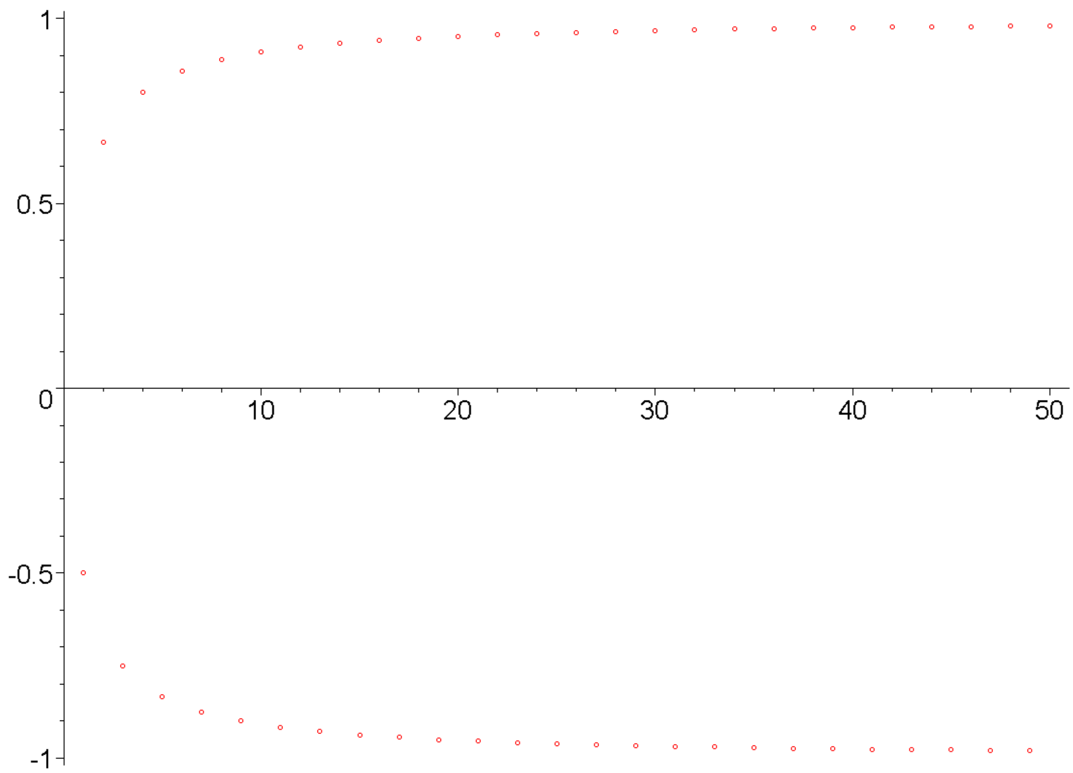
```
> seq(a(i), i=1..10);
```

$$\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{-7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{-9}{10}, \frac{10}{11}$$

```
> evalf(%);
```

-.5000000000, .6666666667, -.7500000000, .8000000000, -.8333333333, .8571428571, -.8750000000, .8888888889, -.9000000000, .9090909091

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=1..50)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```




```
> Limit(a(n), n=infinity) = limit(a(n), n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = -1 \,..\, 1$$

Ricorsione

```
> restart:
> # Successione di Fibonacci: F(0) := 0; F(1) := 1; F(n) := F(n-1)
  + F(n-2) per n>1
> F := proc(n::nonnegint)
  if n<2 then n;
  else F(n-1) + F(n-2);
  end if;
  end proc;
```

$F :=$ **proc**$(n::nonnegint)$ **if** $n < 2$ **then** n **else** $\mathrm{F}(n-1) + \mathrm{F}(n-2)$ **end if end proc**

```
> seq(F(i), i=1..20);
```

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

```
> time(F(30));
```

3.844

```
> # è lenta!Occorre una nuova versione!
> F := 'F';
```

$F := F$

```
> F := proc(n::nonnegint)
  option remember;
  if n<2 then n;
  else F(n-1) + F(n-2);
```

```
end if;
end proc;
```

$F :=$

proc(n::*nonnegint*) **option** *remember*; **if** $n < 2$ **then** n **else** $F(n-1) + F(n-2)$ **end if end proc**

```
> time(F(30));
```

0.

```
> time(F(200));
```

0.

```
> F(200);
```

280571172992510140037611932413038677189525

```
> F(1000);
```

434665576869374564356885276750406258025646605173717804024817290895365554179\
490518904038798400792551692959225930803226347752096896232398733224711616429\
96440906533187938298969649928516003704476137795166849228875

Un altro esempio di ricorsione

```
> restart:
> # a(0) := 3; a(n) := 1/3 + a(n-1)/n, per n>0
> a := proc(n::nonnegint)
if n=0 then 3;
else 1/3 + a(n-1)/n;
end if;
end proc;
```

$a :=$ **proc**(n::*nonnegint*) **if** $n = 0$ **then** 3 **else** $1 / 3 + a(n-1) / n$ **end if end proc**

```
> seq(a(i), i=0..10);
```

$$3, \frac{10}{3}, 2, 1, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{49}{120}, \frac{47}{120}, \frac{367}{960}, \frac{3247}{8640}, \frac{32047}{86400}$$

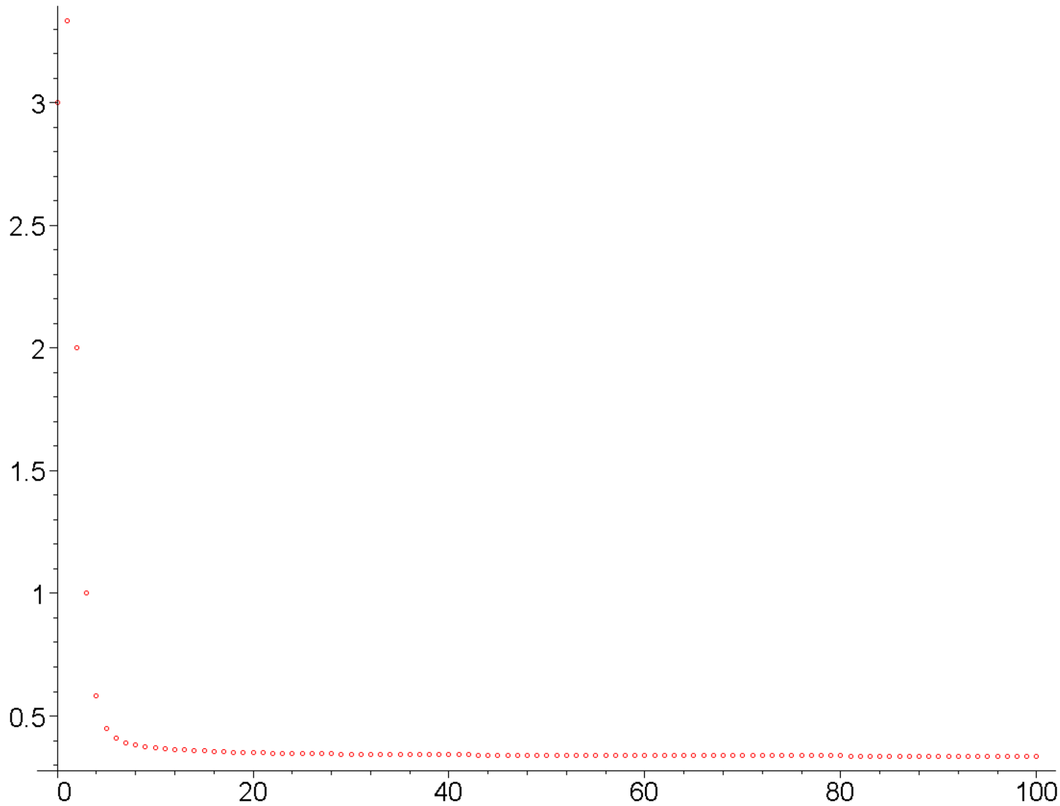
```
> evalf(%);
```

3., 3.333333333, 2., 1., .5833333333, .4500000000, .4083333333, .3916666667, .3822916667,
.3758101852, .3709143519

```
> evalf(seq(a(i), i=1000..1010));
```

.3336670007, .3336666670, .3336663340, .3336660017, .3336656700, .3336653390,
.3336650086, .3336646789, .3336643499, .3336640215, .3336636938

```
> punti := [seq([i,a(i)], i=0..100)]:
> plot(punti, color=red, style=point, symbol=circle);
```



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
20
40
60
80
100