

# Teorema sul prodotto di due numeri che sono somma di 4 quadrati

Autore: Claudio Marsan

Ultima revisione: 16 marzo 2003

Versione: Maple V Release 6.02 for Windows 2000

```
> restart;
```

```
> read(`i:/maple_6/Quaternioni/quaternioni.mpl6`);
```

```
> with(quaternion):
```

## - Teorema

### - Ipotesi

Gli interi  $M$  e  $N$  siano esprimibili come somma di quattro quadrati di numeri interi.

### - Tesi

$MN$  è esprimibile come somma di quattro quadrati di numeri interi.

### - Dimostrazione

$M$  e  $N$  siano somme di quattro quadrati di numeri interi:

```
> M := a^2 + b^2 + c^2 + d^2; N := e^2 + f^2 + g^2 + h^2;
```

$$M := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$N := e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

Costruiamo i quaternioni  $m$  e  $n$ , aventi  $M$  e, rispettivamente,  $N$  come norma:

```
> m := quat(a, b, c, d); qnorm(m);
```

$$m := a + b i + c j + d k$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

```
> n := quat(e, f, g, h); qnorm(n);
```

$$n := e + f i + g j + h k$$

$$e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

Calcoliamo  $p$ , la norma del prodotto dei quaternioni  $m$  e  $n$ :

```
> p := qnorm(qmul(m, n));
```

$$p := (a e - b f - c g - d h)^2 + (a f + b e + c h - d g)^2 + (a g - b h + c e + d f)^2 + (a h + b g - c f + d e)^2$$

Come si può notare,  $p$  è la somma di quattro quadrati di interi. Se risulta  $p = MN$ , ossia se  $p - MN = 0$ , allora il teorema è dimostrato:

```
> is(p - M*N = 0);
```

Il teorema è dunque dimostrato!

*true*