Matrici di Pascal

Note

Autore

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio (Switzerland)
e-mail: claudio.marsan@liceomendrisio.ch

Versione

Versione 2.1, 20 dicembre 2005
Maple V Release 6.02 for Windows 2000

```
> restart: with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

La seguente procedura permette di definire la matrice di Pascal generalizzata

```
> Pascal_matrix := proc(n, x)
    local i, j, M;
    M := matrix(n,n,0);
    for i from 1 to n do
      for j from 1 to n do
        if i>=j then
           M[i,j] := x^(i-j)*binomial(i-1,j-1);
        end if;
      end do;
    end do;
    evalm(M);
  end;
```

Pascal_matrix := **proc**(n, x)
local i, j, M;
  M := matrix($n, n, 0$);
  for i **to** n **do**
    for j **to** n **do if** $j \le i$ **then** $M[i, j] := x$^$(i - j)$*binomial$(i - 1, j - 1)$ **end if end do**
  end do;
  evalm(M)
end proc

Alcuni esempi:

```
> `matrice di Pascal 4x4` = Pascal_matrix(4,1);
> `matrice di Pascal 3x3 generalizzata` = Pascal_matrix(3,x);
> `matrice di Pascal 5x5 generalizzata` = Pascal_matrix(5,x);
```

$$\textit{matrice di Pascal 4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{matrice di Pascal 3x3 generalizzata} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2\,x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{matrice di Pascal 5x5 generalizzata} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2\,x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 3\,x^2 & 3\,x & 1 & 0 \\ x^4 & 4\,x^3 & 6\,x^2 & 4\,x & 1 \end{bmatrix}$$

Nel seguito vogliamo verificare, per esempio nel caso n=4, che le matrici di Pascal (generalizzate) godono di alcune proprietà particolari.

L'inversa di una matrice generalizzata di Pascal P si ottiene cambiando il segno degli elementi di P la cui somma degli indici è dispari. Per esempio:

```
> inverse(Pascal_matrix(3,1));
> inverse(Pascal_matrix(6,x));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & -2\,x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 3\,x^2 & -3\,x & 1 & 0 & 0 \\ x^4 & -4\,x^3 & 6\,x^2 & -4\,x & 1 & 0 \\ -x^5 & 5\,x^4 & -10\,x^3 & 10\,x^2 & -5\,x & 1 \end{bmatrix}$$

Definiamo le matrici di Pascal generalizzate P[x], P[y] e P[x+y]

```
> P[x] := Pascal_matrix(4,x);
> P[y] := Pascal_matrix(4,y);
> P[x+y] := Pascal_matrix(4,x+y);
```

$$P_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2\,x & 1 & 0 \\ x^3 & 3\,x^2 & 3\,x & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_y := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 2\,y & 1 & 0 \\ y^3 & 3\,y^2 & 3\,y & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{x+y} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 2x+2y & 1 & 0 \\ (x+y)^3 & 3(x+y)^2 & 3x+3y & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo Q = P[x]*P[y]

```
> Q := evalm(P[x] &* P[y]);
> Q := map(factor,Q);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 & 0 \\ x^2+2xy+y^2 & 2x+2y & 1 & 0 \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 & 3x^2+6xy+3y^2 & 3x+3y & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 2x+2y & 1 & 0 \\ (x+y)^3 & 3(x+y)^2 & 3x+3y & 1 \end{bmatrix}$$

Vale dunque: P[x+y] = P[x]*P[y]

```
> equal(Q, P[x+y]);
```

$$true$$

Sia P una matrice di Pascal e k un numero intero

```
> P := Pascal_matrix(4,1);
> k := 11;
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k := 11$$

Calcoliamo P^k:

```
> evalm(P^k);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 \\ 121 & 22 & 1 & 0 \\ 1331 & 363 & 33 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo P[k]:

```
> evalm(Pascal_matrix(4,k));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 \\ 121 & 22 & 1 & 0 \\ 1331 & 363 & 33 & 1 \end{bmatrix}$$

Vale dunque: P^k = P[k]

```
> equal(%%,%);
```

$$true$$

Sia P una matrice di Pascal e siano j e k due interi, k<>0

```
> evalm(P);
> j := 5;
> k := 7;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$j := 5$$

$$k := 7$$

Calcoliamo P^j

```
> evalm(P^j);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 1 & 0 \\ 125 & 75 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo (P[j/k])^k

```
> evalm((Pascal_matrix(4,j/k)^k));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 1 & 0 \\ 125 & 75 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Vale dunque: (P[j/k])^k = P^j

```
> equal(%%,%);
>
```

$$true$$

Sopra abbiamo visto come calcolare P[x] quando x è un numero razionale utilizzando potenze delle matrici di Pascal. Vogliamo ora vedere come procedere nel caso in cui x sia un numero reale. Sarà necessario utilizzare l'esponenziazione di matrici.

Definiamo dapprima la seguente matrice quadrata L:

```
> L := proc(n)
    local i, j, M;
    M := matrix(n,n,0);
    for i from 1 to n do
      for j from 1 to n do
        if i=j+1 then M[i,j] := j fi;
      end do;
```

```
    end do;
    evalm(M);
  end;
```

$L := \mathbf{proc}(n)$

local i, j, M;

$M := \mathrm{matrix}(n, n, 0)$;

for i **to** n **do for** j **to** n **do if** $i = j + 1$ **then** $M[i, j] := j$ **end if end do end do**;

$\mathrm{evalm}(M)$

end proc

Alcuni esempi di L, in dipendenza dell'ordine

```
> L(3); L(4); L(7);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora e^(x*L)

```
> E^(x*L(4)) = exponential(x*L(4));
```

$$E^{\left(x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix}$$

Vale dunque: P[x] = e^(x*L)

```
> equal(rhs(%), Pascal_matrix(4,x));
```

$$\mathit{true}$$

La matrice L è tale che (P[x])' = L in x=0

```
> map(diff,Pascal_matrix(4,x),x);
> subs(x=0,%);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,x & 2 & 0 & 0 \\ 3\,x^2 & 6\,x & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo un esempio numerico:

```
> Digits := 5;
> `matrice di Pascal generalizzata` = Pascal_matrix(4, 3.14);
> `mediante esponenziazione` = exponential(3.14*L(4));
```

$$Digits := 5$$

$$\textit{matrice di Pascal generalizzata} = \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 3.14 & 1. & 0 & 0 \\ 9.8596 & 6.28 & 1. & 0 \\ 30.959 & 29.579 & 9.42 & 1. \end{bmatrix}$$

$$\textit{mediante esponenziazione} = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 3.1400 & 1. & 0. & 0. \\ 9.8596 & 6.2800 & 1. & 0. \\ 30.959 & 29.579 & 9.4200 & 1. \end{bmatrix}$$

>