

La capra, il lupo e il cavolo

- Note

- Autore

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio (Switzerland)
e-mail: claudio.marsan@liceomendrisio.ch

- Versione

Versione 2.0, 14 marzo 2003
Maple V Release 6.02 for Windows 2000

> **restart:**

1. Il problema. Sulla riva sinistra di un fiume c'è un contadino che deve trasportare sulla riva destra del fiume una capra, un lupo e un cavolo. Egli ha a disposizione una piccola barca che può trasportare, oltre al contadino stesso, solo un altro "ospite". Egli deve dunque fare più viaggi, badando però a non lasciare su una riva la capra sola con il cavolo oppure il lupo solo con la capra. Quanti viaggi deve fare e come deve procedere il contadino?

2. Lo stato del sistema è rappresentato, in ogni istante di tempo, dagli occupanti della riva sinistra del fiume. Gli stati potenziali del sistema sono:

S[1] = [barca, contadino, lupo, capra, cavolo]

S[2] = [barca, contadino, lupo, capra]

S[3] = [barca, contadino, lupo, cavolo]

S[4] = [barca, contadino, capra, cavolo]

S[5] = [barca, contadino, capra]

S[6] = []

S[7] = [cavolo]

S[8] = [capra]

S[9] = [lupo]

S[10] = [lupo, cavolo]

3. Carichiamo il pacchetto dell'algebra lineare:

> **with(linalg):**

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

4. Costruzione della matrice di incidenza M. Si ha $M[i,j]=1$ se è possibile passare direttamente dallo stato $S[i]$ allo stato $S[j]$, altrimenti si ha $M[i,j]=0$.

```

> M := matrix(10,10,0):
> LL :=
  [[1,10],[2,8],[2,9],[3,7],[3,9],[3,10],[4,7],[4,8],[5,6],[5,8],
  [6,5],[7,3],[7,4],[8,2],[8,4],[8,5],[9,2],[9,3],[10,1],[10,3]]:
> for L in LL do M[L[1],L[2]]:=1 od:
> evalm(M);

```

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

5. Si verifica facilmente che nella posizione $[i,j]$ della matrice M^2 c'è un elemento non nullo se e solo se $M[i,1]*M[1,j] + M[i,2]*M[2,j] + \dots + M[i,10]*M[10,j]$ è diverso da 0. Poiché ciò succede quando si può passare dallo stato $S[i]$ ad uno stato intermedio $S[r]$ e da questo allo stato $S[j]$, segue che nella posizione $[i,j]$ della matrice M^2 c'è un elemento non nullo se è possibile passare da $S[i]$ ad $S[j]$ in due tappe. Analogamente: nella posizione $[i,j]$ della matrice M^n c'è un elemento non nullo quando è possibile passare esattamente in n tappe dallo stato $S[i]$ allo stato $S[j]$.

Il nostro problema si riduce a determinare il valore minimo di n per il quale nella posizione $[1,6]$ della matrice M^n c'è un valore non nullo.

6. Calcoliamo M^2 :

```

> evalm(M^2);

```

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2
 \end{bmatrix}$$

7. Calcoliamo M^3 :

```

> evalm(M^3);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Calcoliamo M^4 :

> `evalm(M^4);`

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 12 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Calcoliamo M^5 :

> `evalm(M^5);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 18 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 18 & 14 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 13 & 18 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 16 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 18 & 13 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 18 & 14 & 18 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 13 & 18 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 16 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Calcoliamo M^6 :

> `evalm(M^6);`

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 16 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 31 & 32 & 30 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 52 & 32 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 30 & 32 & 31 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 23 & 16 & 23 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 16 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 31 & 32 & 30 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 32 & 52 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 30 & 32 & 31 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 23 & 16 & 23 & 22 \end{bmatrix}$$

11. Calcoliamo M^7 :

> `evalm(M^7);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 23 & 16 & 23 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 62 & 84 & 63 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 84 & 80 & 84 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 63 & 84 & 62 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 39 & 68 & 39 & 18 \\ 2 & 23 & 16 & 23 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 62 & 84 & 63 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 84 & 80 & 84 & 68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 63 & 84 & 62 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 39 & 68 & 39 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Siccome l'elemento della posizione [1,6] non è nullo, abbiamo determinato che 7 è il numero minimo di viaggi che deve fare il contadino. È poi facile determinare, usando la matrice di incidenza M, quali stati deve passare il contadino:

S[1] --- S[10] --- S[3] --- S[9] --- S[2] --- S[8] --- S[5] --- S[6].