

Equazioni alle differenze

- Note

- Autore

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio (Switzerland)
e-mail: claudio.marsan@liceomendrisio.ch

- Versione

Versione 2.0, 16 marzo 2003
Maple V Release 6.02 for Windows 2000

```
> restart;
```

Maple, mediante il comando **rsolve** (recurrence solver) è in grado di risolvere determinate equazioni alle differenze.

```
> rsolve(y(n+1) = 3*y(n) - 5, y);
```

$$y(0) 3^n - \frac{5}{2} 3^n + \frac{5}{2}$$

Nell'esempio precedente Maple è stato in grado di trovare una soluzione esplicita, dipendente da $y(0)$. Possiamo anche assegnare un valore iniziale a $y(0)$ (da notare il cambiamento di sintassi!) e calcolare qualche valore:

```
> rsolve({y(n+1) = 3*y(n) - 5, y(0)=1}, y);
```

$$-\frac{3}{2} 3^n + \frac{5}{2}$$

```
> Y := %;
```

$$Y := -\frac{3}{2} 3^n + \frac{5}{2}$$

```
> subs(n=13, Y);
```

-2391482

```
> seq(subs(n=i, Y), i=0..10);
```

1, -2, -11, -38, -119, -362, -1091, -3278, -9839, -29522, -88571

Quanto appena fatto per calcolare qualche valore è piuttosto scomodo e poco naturale. Molto meglio è sfruttare l'opzione 'makeproc' del comando **rsolve** (attenzione: ricordarsi di mettere gli apici!):

```
> y := rsolve({y(n+1) = 3*y(n) - 5, y(0)=1}, y, 'makeproc');
```

```
y :=
```

```
proc(n) if 1 < nargs then 'procname'(args) else expand(-3 / 2*3^n + 5 / 2) end if end proc
```

```
> y(2); y(13);
```

-11
-2391482

```
> seq(y(i), i=0..10);
```

1, -2, -11, -38, -119, -362, -1091, -3278, -9839, -29522, -88571

Vediamo ora un esempio con un'equazione alle differenze lineare omogenea del secondo ordine (successione di Fibonacci):

```
> rsolve({F(n+1) = F(n) + F(n-1), F(0)=0, F(1)=1}, F);
```

$$\frac{\left(-1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(-2 - \frac{1}{-\sqrt{5} + 1}\right)^n}{-\sqrt{5} + 1} + \frac{\left(-1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(-2 - \frac{1}{\sqrt{5} + 1}\right)^n}{\sqrt{5} + 1}$$

```
> normal(%, expanded);
```

$$-\frac{1}{5}\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)^{-n}(-2)^n + \frac{1}{5}\sqrt{5}2^n(\sqrt{5} - 1)^{-n}$$

```
> subs(n=10, %);
```

$$-\frac{1024}{5}\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} + 1)^{10}} + \frac{1024}{5}\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - 1)^{10}}$$

```
> normal(%, expanded);
```

55

Più comoda da usare:

```
> F := rsolve({F(n+1) = F(n) + F(n-1), F(0)=0, F(1)=1}, F,  
'makeproc');
```

```
F := proc(n)
```

```
local i, s, t, bipow;
```

```
    bipow := proc(n) ... end proc;
```

```
    if 1 < nargs or not type(n, integer) then 'procname'(args)
```

```
    else
```

```
        s := bipow(n - 1);
```

```
        t := 0;
```

```
        for i to 2 do t := t + s[1, i]*(array(1 .. 2, [(1)=1, (2)=0]))[i] end do;
```

```
        t
```

```
    end if
```

```
end proc
```

```
> F(10);
```

55

Il seguente comando permette di vedere le scelte che **rsolve** fa quando tenta di risolvere l'equazione alle differenze:

```

[ > infolevel['rsolve'] := 2:
> rsolve({f(n+1) = f(n) + f(n-1), f(0)=0, f(1)=1}, f);
rsolve: solving single equation recurrence
rsolve/single/process: evaluating linear recurrence with constant coefficient
s

```

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(2\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^n}{\sqrt{5}-1} + \frac{\left(-1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(-2\frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)^n}{\sqrt{5}+1}$$

Un esempio più complesso:

```

[ > rsolve({x(n)*x(n-1) + x(n) - x(n-1) = 0, x(0)=a}, x);
rsolve: solving single equation recurrence
rsolve/single/process: evaluating first order recurrence
rsolve: solving single equation recurrence
rsolve/single/process: evaluating linear recurrence with constant coefficient
s

```

$$\frac{a}{1 + n a}$$