Riduzione di una matrice in forma a gradini

Note

Autore

Claudio Marsan
Liceo Cantonale di Mendrisio
Via Agostino Maspoli
CH-6850 Mendrisio (Switzerland)
e-mail: claudio.marsan@liceomendrisio.ch

Versione

Versione 2.0, 15 marzo 2003
Maple V Release 6.02 for Windows 2000

```
> restart: with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

In questo foglio di lavoro vedremo come risolvere un sistema di equazioni usando il metodo di riduzione a gradini della matrice incrementata dei coefficienti.

Consideriamo un sistema lineare 3x3 i cui coefficienti sono dati dalle matrici seguenti:

```
> A := matrix(3,3,[[6,3,-4],[-4,2,-6],[1,2,-5]]);
> B := matrix([[1/2],[-2],[3/4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Costruiamo la matrice incrementata del sistema Ax = B:

```
> A_B := augment(A,B);
```

$$A\_B := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Scambiamo, nella matrice sopra, la seconda e la terza riga:

```
> swaprow(%,1,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 6 & 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Addizioniamo alla seconda riga della matrice sopra la prima riga moltiplicata per 4:

```
> addrow(%,1,2,4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 10 & -26 & 1 \\ 6 & 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Addizioniamo alla terza riga della matrice sopra la prima riga moltiplicata per -6:

```
> addrow(%,1,3,-6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 10 & -26 & 1 \\ 0 & -9 & 26 & -4 \end{bmatrix}$$

Moltiplichiamo la seconda riga dell'ultima matrice per 1/10:

```
> mulrow(%,2,1/10);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & -9 & 26 & -4 \end{bmatrix}$$

Addizioniamo alla terza riga della matrice sopra la seconda riga moltiplicata per 9:

```
> addrow(%,2,3,9);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{-31}{10} \end{bmatrix}$$

Troviamo ora x[3]:

```
> x[3] := (-31/10) / (13/5);
```

$$x_3 := \frac{-31}{26}$$

Troviamo ora x[2]:

```
> x[2] := 1/10 - (-13/5) * x[3];
```

$$x_2 := -3$$

Troviamo ora x[1]:

```
> x[1] := 3/4 - 2 * x[2] - (-5) * x[3];
```

$$x_1 := \frac{41}{52}$$

Verifichiamo la soluzione trovata per la prima equazione:

```
> sum(A[1,j]*x[j],j=1..3);
```

$$\frac{1}{2}$$

Verifichiamo la soluzione trovata per la seconda equazione:

```
> sum(A[2,j]*x[j],j=1..3);
```

$$-2$$

Verifichiamo la soluzione trovata per la terza equazione:

```
> sum(A[3,j]*x[j],j=1..3);
```

$$\frac{3}{4}$$

Naturalmente Maple V è in grado di risolvere il sistema automaticamente mediante il metodo di Gauss:

```
> G := gausselim(A_B);
> X := backsub(G);
```

$$G := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & \frac{-26}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-13}{12} & \frac{31}{24} \end{bmatrix}$$

$$X := \left[\frac{41}{52}, -3, \frac{-31}{26}\right]$$

Maple V può anche ridurre la matrice incrementata in forma canonica a gradini (metodo di Gauss-Jordan):

```
> GJ := gaussjord(A_B);
```

```
> backsub(GJ);
```

$$GJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{52} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-31}{26} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{41}{52}, -3, \frac{-31}{26}\right]$$