Giornate delle Scienze
“Altri mondi”
Seconda giornata

Liceo di Mendrisio

Contenuti

- Introduzione
- Eratostene e il raggio della Terra
- Aristarco
    1) Stima del rapporto fra distanza Sole- Terra e Terra- Luna

    2) Relazione fra il rapporto delle distanze Terra- Sole e Terra- Luna e il rapporto delle dimensioni del Sole e della Luna

    3) Stima delle dimensioni della Luna e del Sole
- Gli errori di Aristarco

A quale distanza dalla Terra si trovano il Sole e la Luna?

Quali sono le loro dimensioni?

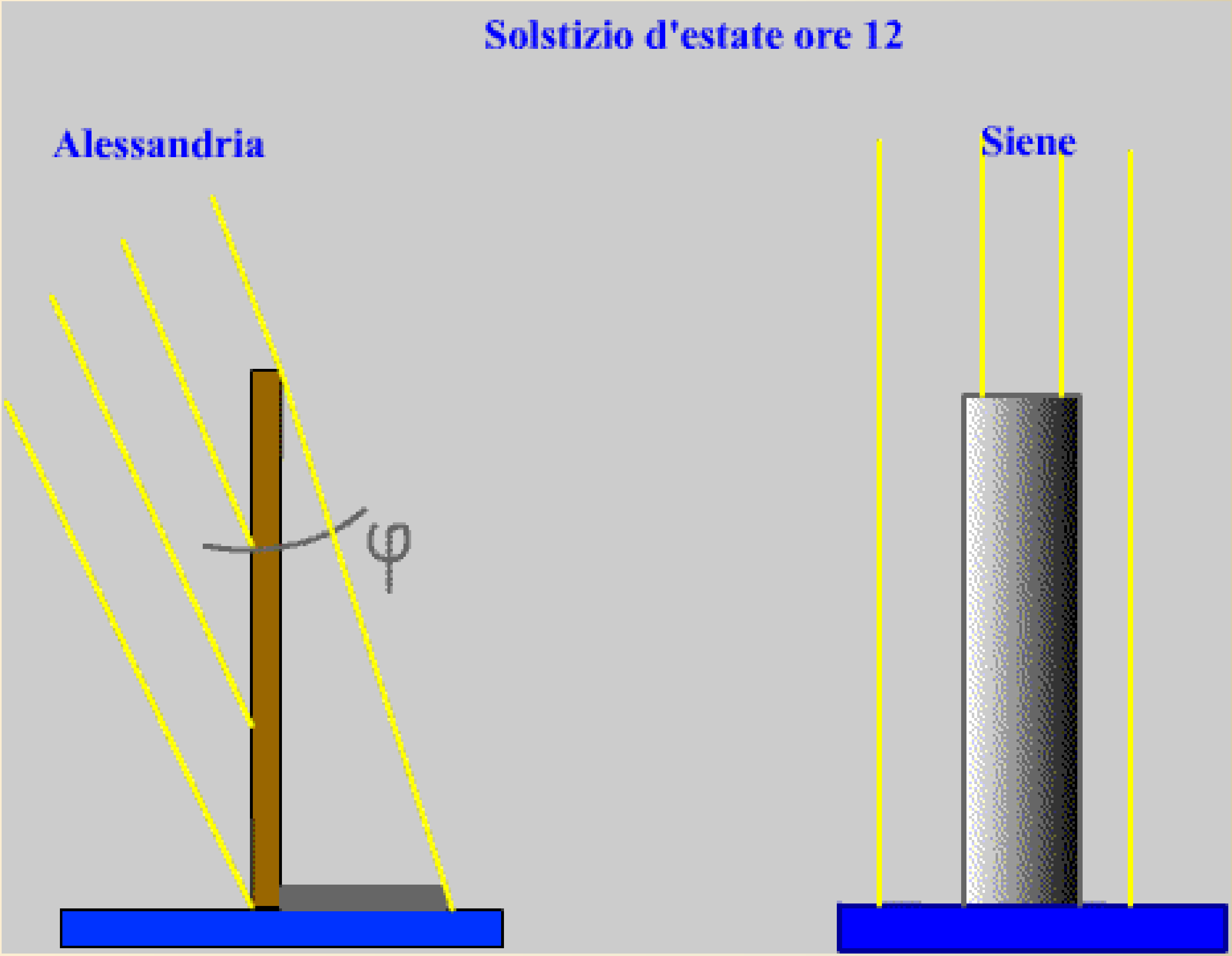
Gli astronomi moderni tentano di misurare la distanza che ci separa dai confini dell’universo osservabile e il tempo che ci separa dall’origine dell’universo… numeri tuttavia troppo grandi per avere un senso per la nostra mente limitata.

Comunque siamo riusciti a calcolarli, un passo alla volta, compiendo prodigi di ingegnosità in una storia di successi sorprendenti della tecnologia, ma soprattutto in una storia di genialità inventiva, che continua, perché ingegnosità e inventiva non finiscono mai!

La storia del nostro desiderio di conoscere queste enormi distanze deve essere cominciata prima dell’inizio della storia documentata… circa 2200 anni fa, in Egitto, nei pressi della foce del Nilo, quando un uomo riuscì a misurare la circonferenza del nostro pianeta!

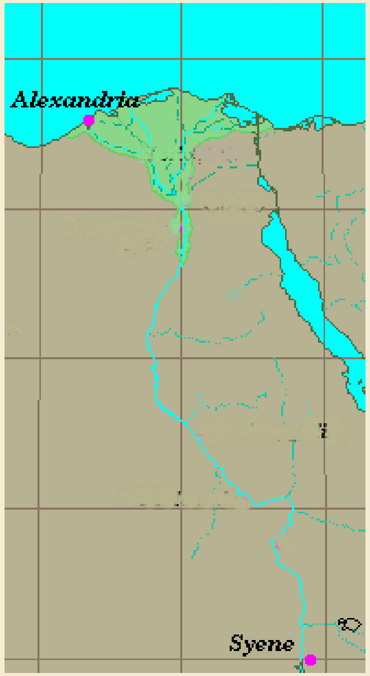
Il dotto enciclopedico **Eratostene di Cirene (273- 192 a. C.)**, direttore della biblioteca di Alessandria dal 235 al 195 a. C., decise di misurarla in un modo semplicissimo.
Ci dimostrò come ciò che sarebbe impensabile misurare direttamente, si può misurare in modo indiretto con inventiva:
è il padre della “geodesia”, la scienza della misurazione della Terra.

A Siene, nel giorno del solstizio estivo a mezzogiorno un raggio di luce solare illuminava il fondo di un pozzo. Questo significava che il Sole a Siene era esattamente a perpendicolo.

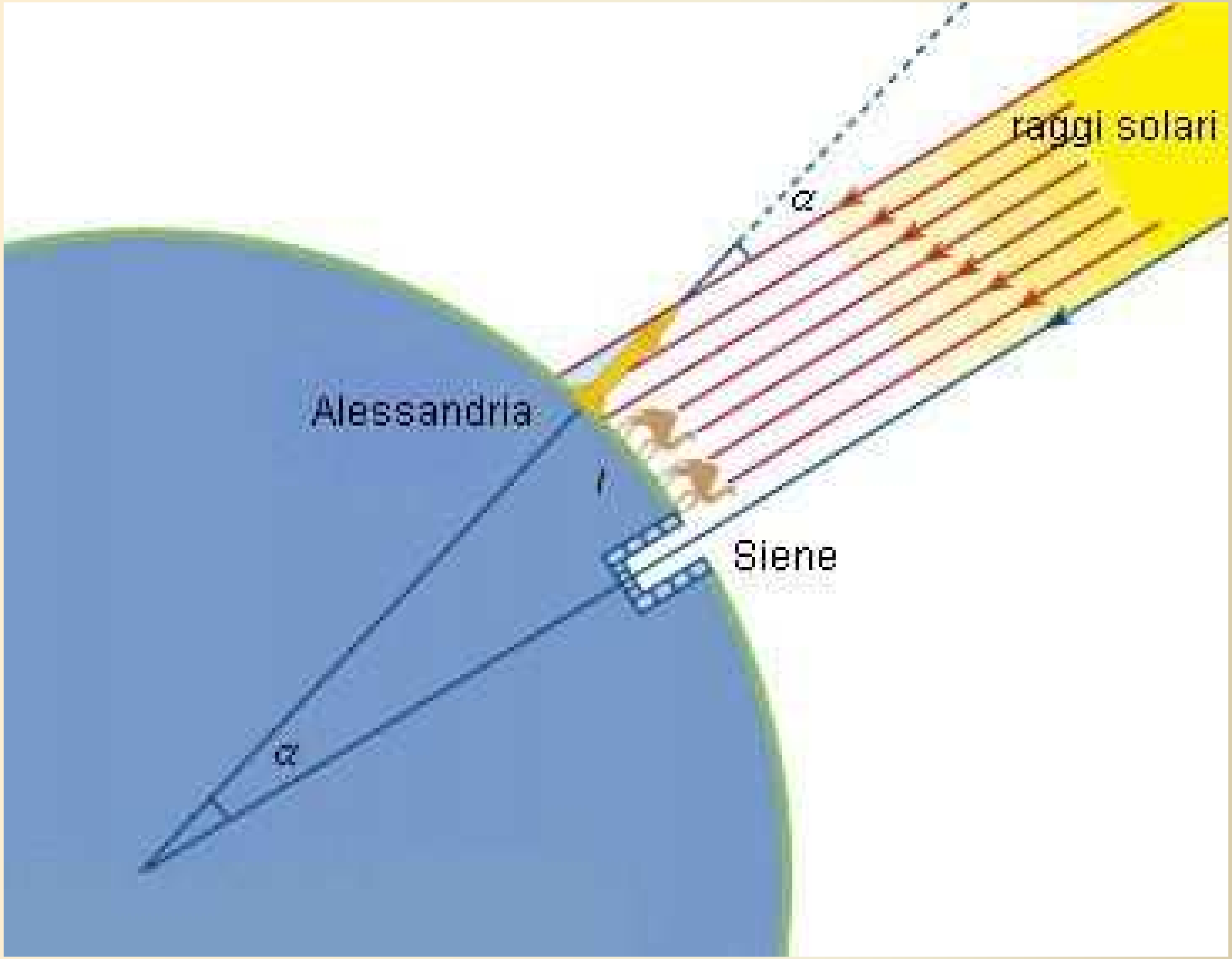


Solstizio d'estate ore 12
Alessandria
Siene
φ

Un bastone piantato verticalmente nel terreno a Siene non proiettava ombra, diversamente che ad Alessandria, molto più a Nord (che si trovava, secondo Eratostene, sullo stesso meridiano).

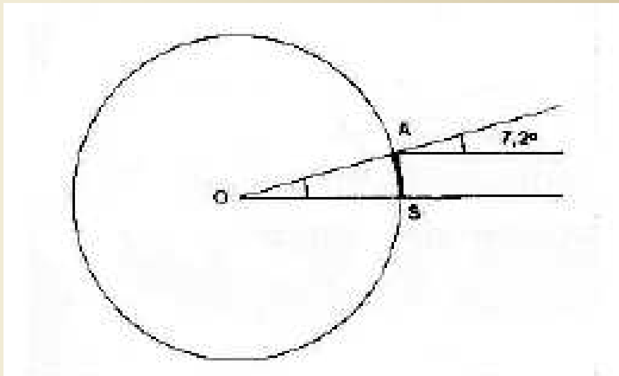


Misurando con uno strumento l’angolo proiettato dalla sua ombra, Eratostene rilevò che il Sole qui era alto 82°48' e che quindi l’angolo fra le verticali locali era di 7°12' (7 gradi e un quinto, o 7.2°).


raggi solari
α
Alessandria
Siene
α

Potendo considerare paralleli tutti i raggi del Sole quando colpiscono la Terra, l’angolo al centro dove si intersecavano la verticale di Alessandria e quella di Siene risultava uguale all’angolo dell’ombra proiettato dal bastone (angoli alterni interni formati da rette || tagliate da una trasversale).

Se Siene è esattamente a Sud di Alessandria, il rapporto tra la distanza Siene-Alessandria (cioè l'arco di meridiano tra Siene ed Alessandria) e l'intera circonferenza terrestre deve essere uguale a quello fra l'angolo tra le verticali al centro della Terra e l'intero angolo giro: $\frac{\text{distanza}_{\text{AS}}}{2\pi R_{Terra}} = \frac{\alpha}{360°}$.



In altri termini:
la distanza angolare Alessandria- Siene è pari a 7.2°, contenuta 50 volte nell’angolo di 360° . Quindi, sapendo che la distanza Siene- Alessandria sulla superficie della Terra è di 5.000 “stadi”, la circonferenza terrestre è di

5.000 per 50= 250.000 “stadi”

(in seguito Eratostene affinerà a 252.000)

Che unità di misura è lo “stadio”?

Questa domanda solleva un problema nella valutazione del risultato ottenuto da Eratostene.

Se uno stadio fosse pari a 157.5 m, il risultato di Eratostene sarebbe circa 39.690 km, molto vicino al valore oggi noto (40.009 km passando dai poli e 40.079 km per l’equatore).
Il valore del diametro terrestre sarebbe pari a 12.631 km, in buon accordo con il valore medio moderno di 12.740 km.

Secondo un’altra ipotesi lo “stadio” sarebbe 1/8 o 1/10 di un miglio romano (1480 m). Secondo altre fonti, lo “stadio” non era unico, la sua misura variava da 150 a 215 m. I valori ottenuti da Eratostene sarebbero allora troppo grandi rispetto a quelli attuali. Esempio: se 1 “stadio” fosse pari a 185 m, la circonferenza terrestre avrebbe dovuto misurare circa 46.600 km, oltre 6.000 km superiore al valore attuale.

C’è un altro problema: Eratostene aveva supposto che Siene ed Alessandria si trovassero sullo stesso meridiano. In realtà Siene è più a est di Alessandria di circa 4° .

Questo aumenta di molto la distanza fra le due città.

In ogni caso Eratostene trovò un valore sorprendentemente vicino al valore moderno.

Egli fece un uso ingegnoso e corretto della geometria, arrivando a riconoscere che un problema *poteva* essere risolto, indicandone il *metodo*, aldilà dell’incertezza dei risultati numerici causata dalle difficoltà a misurare la longitudine e alla mancanza di accordo sulla lunghezza dello “stadio”!

Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.), scienziato greco, è solitamente citato come uno dei pochi precursori di Copernico nel proporre una visione eliocentrica del cosmo.

Matematico ed astronomo, Aristarco occupa un posto importante nello sviluppo dell'astronomia matematica:

- tentativo di determinare il rapporto fra la distanza Sole- Terra e quella Terra- Luna,
- tentativo di determinare le dimensioni e le distanze del Sole e della Luna.

I valori ricavati, per quanto molto imprecisi, rappresentarono un grande passo avanti rispetto alle speculazioni precedenti verso un apprezzamento più realistico della grandezza dell'universo:

Anassimandro: distanza(TS) ~ 1.5 distanza(TL)

Eudosso: distanza(TS) ~ 9distanza(TL)

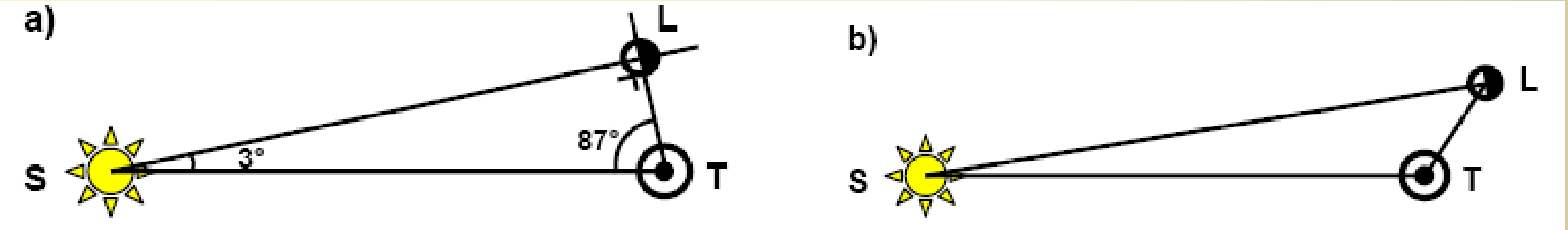
Fidia: distanza(TS) ~ 12 distanza(TL)

L'unica opera di Aristarco giunta sino a noi si chiama “***Sulle grandezze e le distanze del Sole e della Luna***” e fornisce la deduzione geometrica della **distanza fra la Terra e il Sole** sulla base delle osservazioni, senza peraltro alcun cenno alle ipotesi eliocentriche.

Ipotesi:

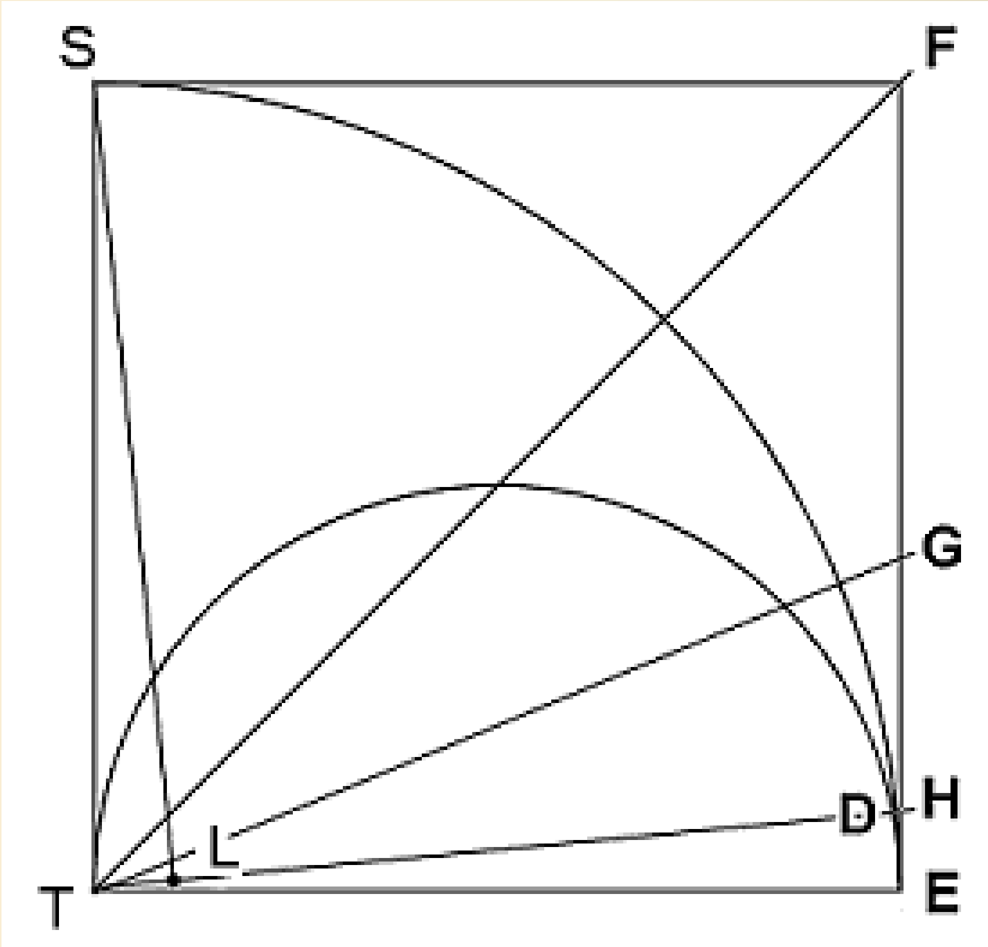
- la Luna riceve la sua luce dal Sole;
- la Terra è una sfera;
- il Sole è lontano, ma non troppo perché i suoi raggi colpiscano Terra e Luna con angoli diversi;
- la Luna orbita intorno alla Terra in modo che sia possibile avere le eclissi.

La situazione osservata da Aristarco:



Il triangolo formato dai 3 corpi celesti è in generale scaleno, diventa rettangolo in L quando la Luna appare ad un osservatore sulla Terra illuminata esattamente a metà dai raggi solari (primo o ultimo quarto) ed il cerchio che divide a metà la parte illuminata da quella oscura si trova esattamente nella direzione del nostro occhio.

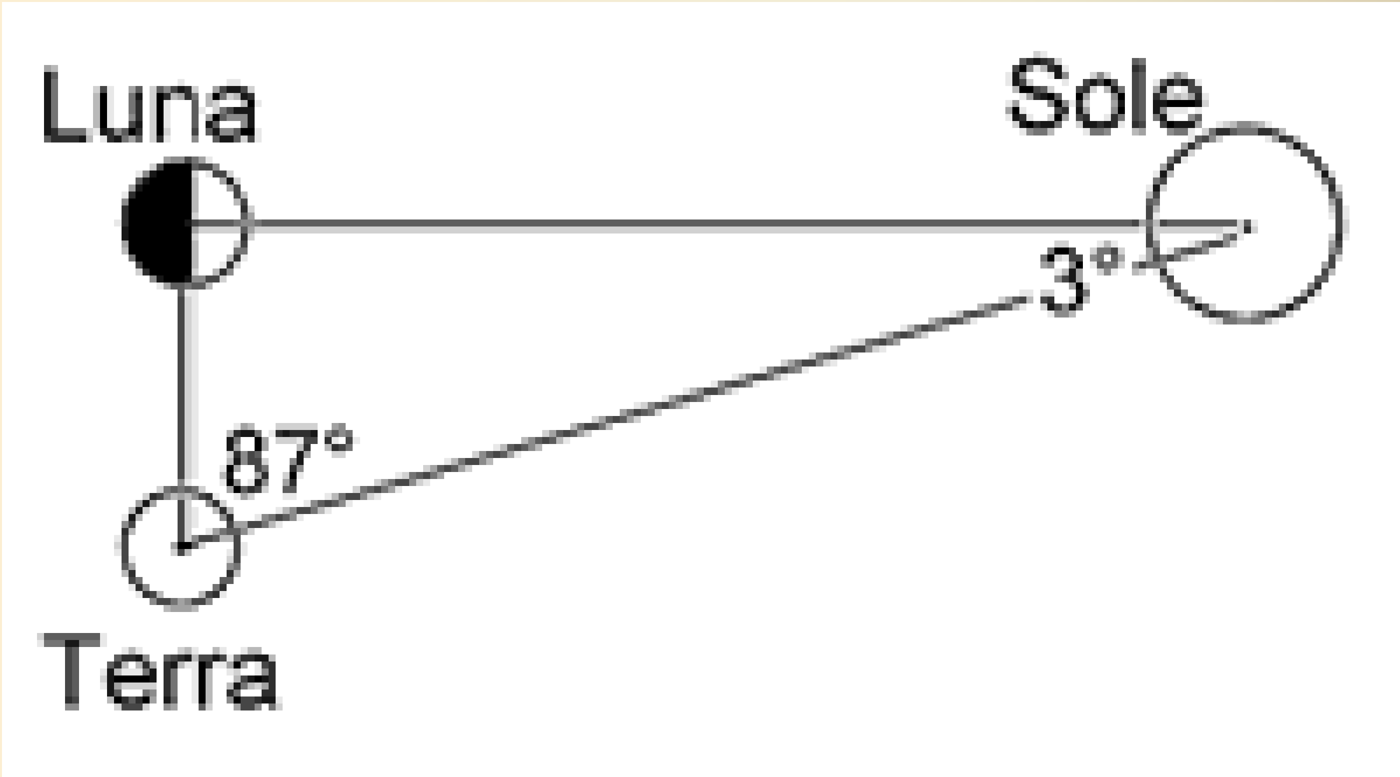
1) Stima del **rapporto** fra **distanza Sole- Terra** e **distanza Terra- Luna**



Dalle osservazioni Aristarco deduce che $S\hat{T}L$ è "1 quadrante meno la 30-esima parte di 1 quadrante", cioè 87° (l'uso di 360° si diffuse solo con Ipparco, 190 a. C.– 127 a.C., importante astronomo greco); allora $T\hat{S}L$ =3°. Non disponendo della trigonometria né di tavole trigonometriche, Aristarco esegue una serie di passaggi dimostrativi di geometria per dimostrare che:

$$\mathbf{18 < ST/TL < 20}$$

Con l'uso della trigonometria?



Il rapporto fra le distanze dalla Terra del Sole e della Luna è dato da: $\frac{d_{TS}}{d_{TL}} = \frac{1}{\sin(3°)}$

Il ragionamento di Aristarco equivale a calcolare:

1/20 < sen 3° < 1/18

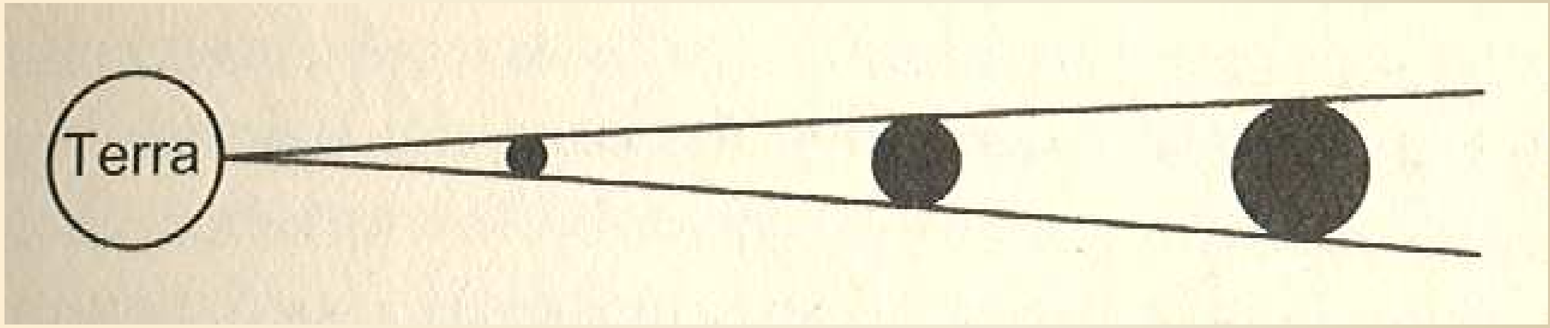
In altri termini il Sole è 18-20 volte più lontano della Luna: $d_{TS} \approx 19 \cdot d_{TL}$

2) **Relazione fra**

- il **rapporto delle distanze** Terra- Sole e Terra- Luna e
- il **rapporto delle dimensioni** del Sole e della Luna

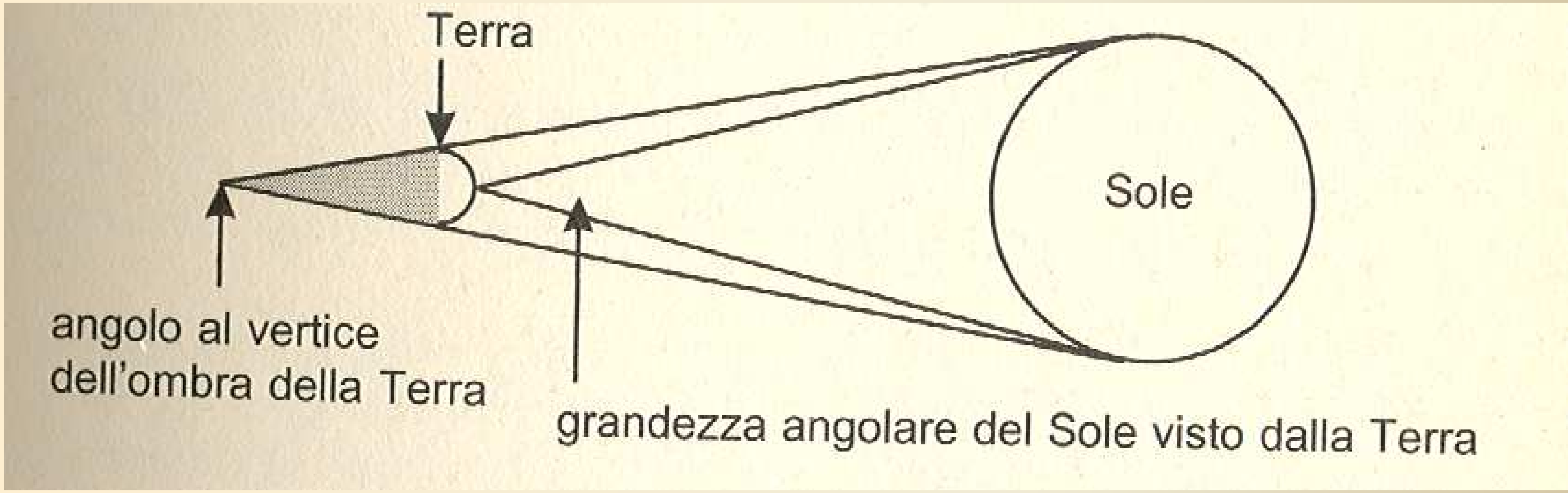
Aristarco assume che i due corpi celesti siano visti dalla Terra sotto lo stesso angolo e che quindi il rapporto dei diametri sia lo stesso del rapporto fra le distanze.

Durante un’eclisse solare, infatti, la Luna copre quasi esattamente il Sole, entrambi hanno quindi lo stesso diametro angolare apparente, che ci dice quanta parte di cielo “copre” un corpo.



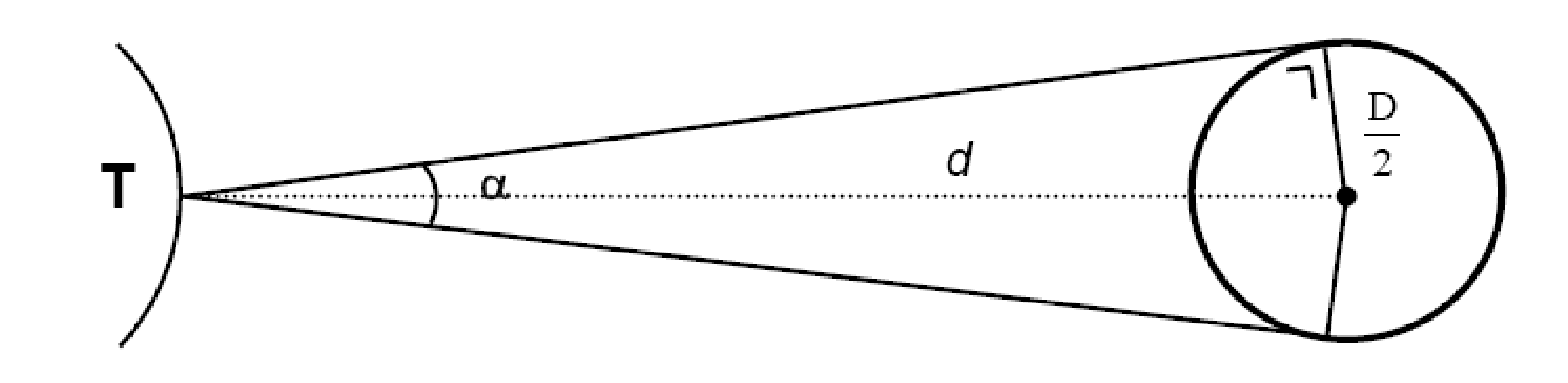
Il Sole e la Luna avevano agli occhi di Aristarco lo stesso diametro angolare, ma questo non implicava che avessero la stessa grandezza, poiché la loro grandezza apparente non dipendeva soltanto dalla loro grandezza assoluta ma anche dalla loro distanza.

Aristarco suppose allora che il Sole fosse molto più grande della Terra e che anche l’ombra proiettata dalla Terra potesse avere circa la stessa grandezza angolare del Sole e della Luna.



Stranamente Aristarco usa il valore di 2° come diametro angolare del Sole e della Luna. Archimede, però, cita un valore di 0.5° attribuendolo ad Aristarco.

Per capire meglio il rapporto fra la distanza di un oggetto, il suo diametro e l'angolo sotto il quale è visto osserviamo la seguente figura:



Un oggetto di diametro D è posto a distanza d dalla terra T.

α è il diametro angolare apparente, l'angolo sotto il quale l'oggetto è visto.

Rigorosamente si avrebbe:

$\frac{D}{2} = d \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, cioè $D = 2d \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Ma per angoli α piccoli espressi in radianti si ha:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha}{2} \qquad \sin(\alpha) \approx \alpha$$

quindi: $D \approx d \cdot \sin(\alpha)$, cioè $\frac{D}{d} \approx \sin(\alpha)$.

Prendendo $\alpha = 0.5°$ sia per la Luna che per il Sole si ha:

$$\frac{D_S}{d_{TS}} \approx \sin(\alpha_S) = \sin(\alpha_L) \approx \frac{D_L}{d_{TL}}$$

più semplicemente: $\frac{D_S}{d_{TS}} \approx \frac{D_L}{d_{TL}}$, cioè $\frac{D_S}{D_L} \approx \frac{d_{TS}}{d_{TL}}$

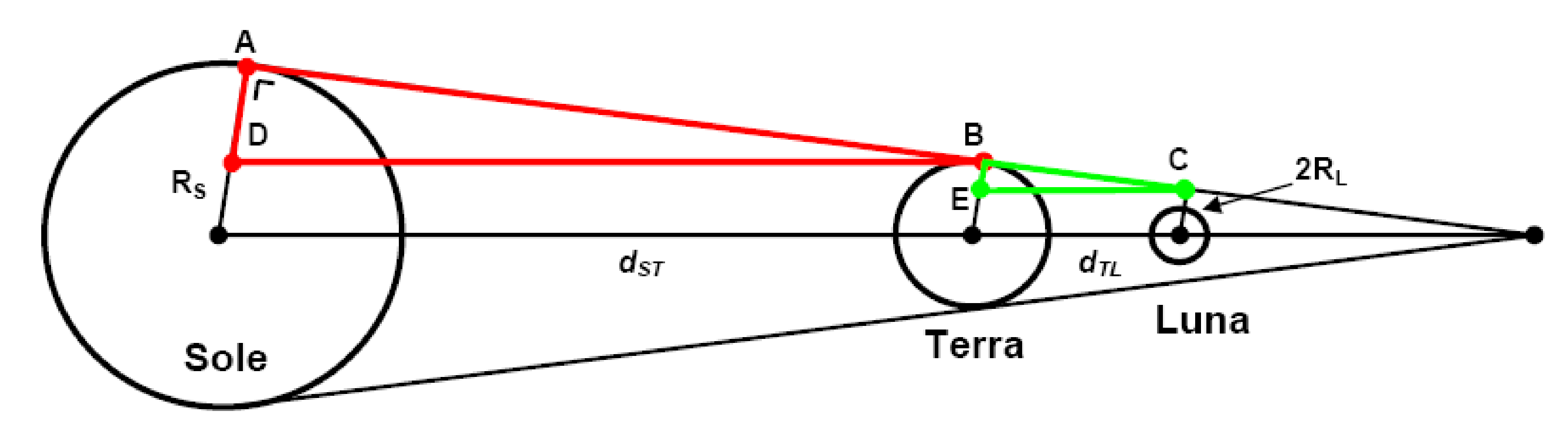
In parole:

il rapporto $\frac{D_S}{D_L}$ fra le dimensioni del Sole e della Luna doveva essere uguale al rapporto $\frac{d_{TS}}{d_{TL}}$ fra la distanza Terra- Sole e la distanza Terra- Luna.

Se il Sole era fra le 18 e le 20 volte più lontano della Luna dalla Terra, doveva essere anche fra le 18 e le 20 volte più grande!

3) Stima delle **dimensioni** della **Luna** e del **Sole**

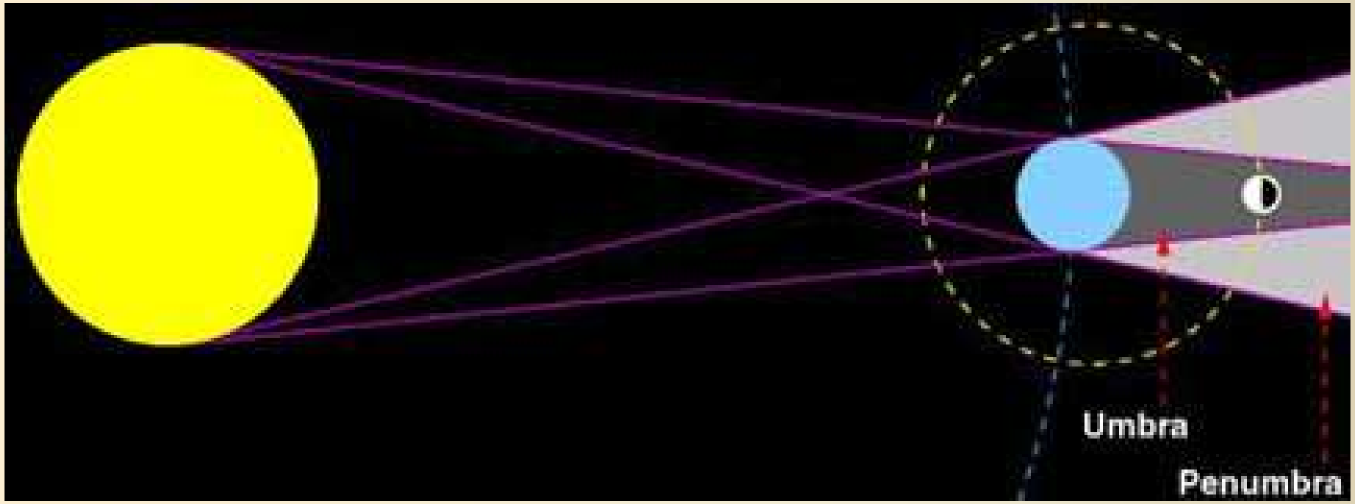
Aristarco non si fermò alla stima del rapporto fra le distanze, ma trovò il modo per convertirlo in distanze numeriche assolute e in valori assoluti del diametro di entrambi i corpi.



A
D
B
C
$2R_L$
R_S
E
d_{ST}
d_{TL}
Sole
Terra
Luna

Anche qui Aristarco utilizza un dato preso dall’osservazione: durante un’eclisse di Luna di durata massima (ossia un’eclisse nella quale la Luna passa esattamente al centro dell’ombra proiettata dalla Terra), l’ombra della Terra è 2 volte più larga del diametro della Luna stessa.

Come fece Aristarco a trarre questa conclusione?
Misurando i tempi dedusse che la larghezza dell’ombra della Terra, nel punto in cui era attraversata dalla Luna, era approssimativamente doppia del diametro della Luna stessa.



Combinando questa informazione con i risultati ottenuti in precedenza e osservata la similitudine dei triangoli in figura, Aristarco perviene al seguente risultato:

$$R_L \approx \frac{1}{3} R_T \qquad \text{e} \qquad R_S \approx 6.5 R_T$$

Cioé $D_S = 2R_S \approx 13 R_T$ e $D_L = 2R_L \approx \frac{2}{3} R_T$

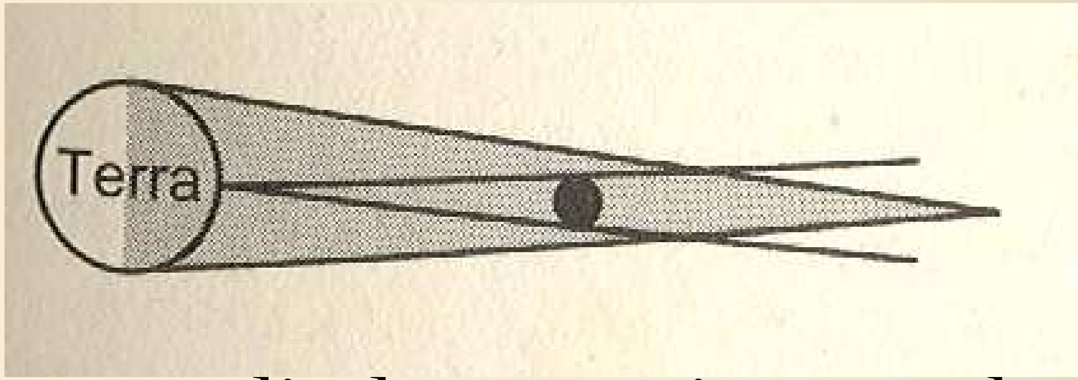
A questo punto, nella relazione

$$\frac{D_S}{D_L} \approx \frac{d_{TS}}{d_{TL}} ,$$

è sufficiente conoscere d_{TL}

per determinare d_{TS} .

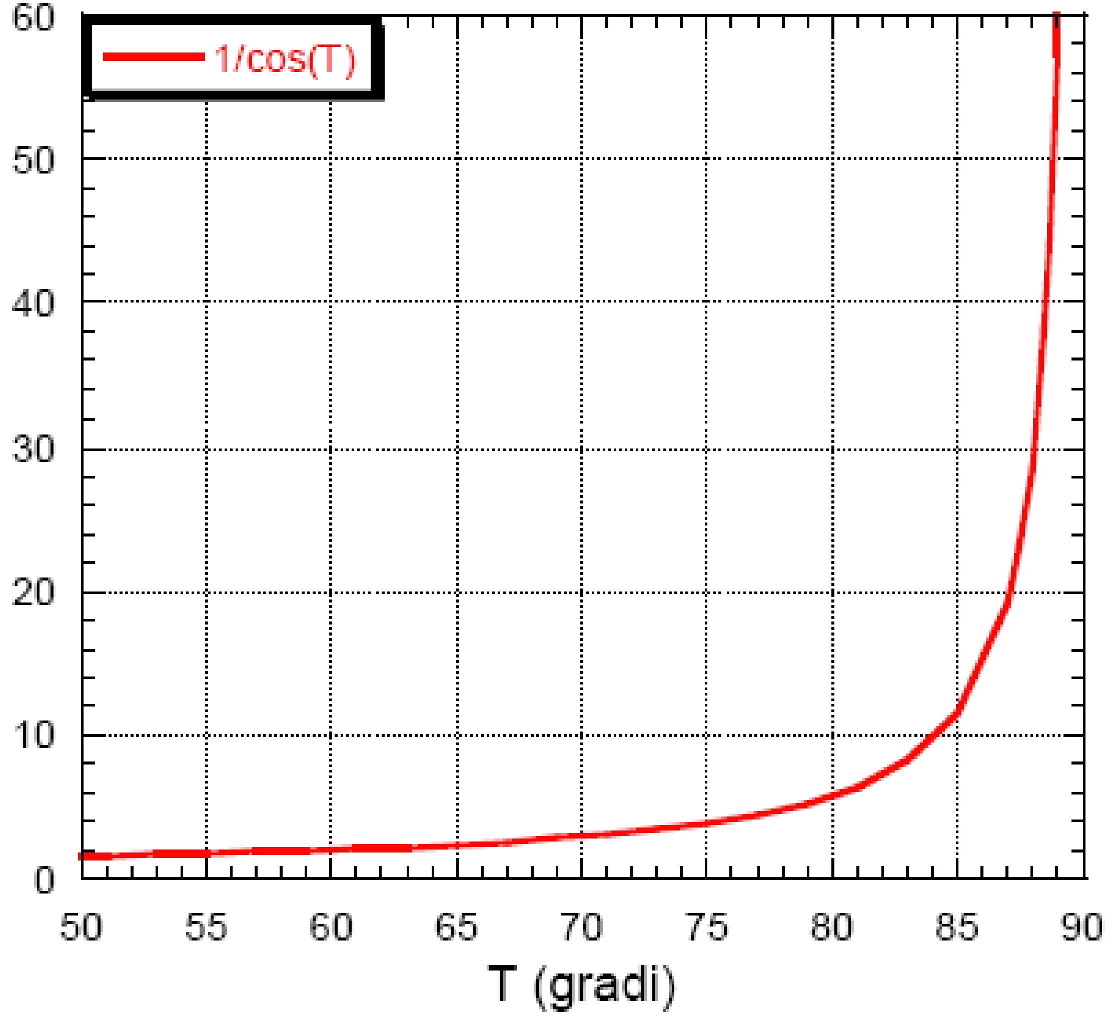
Poiché, come egli pensava, l'angolo al vertice dell'ombra della Terra era uguale al diametro angolare della Luna, c'era solo una distanza dalla Terra a cui si poteva collocare la Luna perché questa coprisse metà della larghezza dell'area dell'ombra:



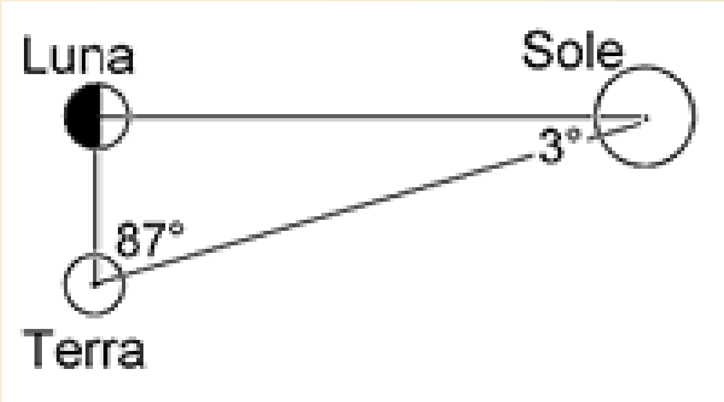
Così Aristarco diede una stima anche di d_{TS} .

4) Gli **errori** di **Aristarco**

La distanza angolare fra Sole e Luna, stimata da Aristarco pari a 87°, è in realtà di circa 89° 51', che porta il rapporto fra le distanze Terra-Sole e Terra- Luna a circa 400.


1/cos(T)
60
50
40
30
20
10
0
50
55
60
65
70
75
80
85
90
T (gradi)

Quando l'angolo $\beta = S\hat{T}L$ si avvicina a 90°, piccole variazioni di β causano grandi variazioni nella funzione rappresentata, essendo $\alpha = 90° - \beta$ e $\sin(\alpha) = \sin(90° - \beta) = \cos(\beta)$



La misura di α deve essere accurata.
Oggi è noto che:

distanza(TS)~390distanza(TL)!

L'errore deriva dalla difficoltà:

- di misurare esattamente l'angolo formato fra il Sole e la Luna
- di determinare il centro preciso del Sole e della Luna
- di calcolare ed osservare il momento esatto in cui la Luna è illuminata al 50%.

Anche la valutazione della larghezza dell’ombra della Terra fatta da Aristarco non è precisa.
Essa è maggiore del doppio del diametro della Luna:

Ipparco stimerà 2.5!

In realtà, come a molti filosofi greci, ad Aristarco non interessava tanto trovare valori accurati, quanto **formulare la teoria e il procedimento per arrivare al risultato**.

Procedimento perfettamente valido e corretto, nonostante i valori errati lo portassero a conclusioni sbagliate.

Insomma…

il risultato esatto… non è tutto!

Ad Aristarco interessava soprattutto

il metodo!

Il trattato di Aristarco colpisce per **il rigore delle dimostrazioni** e per **l'utilizzo** di **osservazioni** e di **intuito** unitamente ad alcune **conoscenze matematiche**.